

**Г.Н. Чусавитина**

# **ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

*3-е издание, стереотипное*

*Допущено Учебно-методическим объединением по образованию  
в области прикладной информатики в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности «Прикладная информатика (по областям)»  
и другим экономическим специальностям*

Москва  
Издательство «ФЛИНТА»  
2014

УДК 336(075.8)  
ББК 65.052я73  
Ч94

**Серия «Экономика и управление»**

Главный редактор *Д.И. Фельдштейн*  
Заместитель главного редактора *С.К. Бондырева*

Члены редакционной коллегии:  
*А.Г. Асмолов, В.А. Болотов, В.П. Борисенков, А.А. Деркач,  
А.И. Донцов, И.В. Дубровина, М.И. Кондаков, В.Г. Костомаров,  
Н.Н. Малофеев, Н.Д. Никаноров, В.А. Поляков, В.В. Рубцов, Э.В. Сайко*

Рецензенты:  
д-р физ.-мат. наук Уральского государственного  
экономического университета, проф. *А.Ф. Шориков*;  
канд. техн. наук, доцент Магнитогорского государственного  
технического университета *В.Н. Немец*

**Чусавитина Г.Н.**

Ч94 Основы финансовой математики [Электронный ресурс] : учеб.  
пособие / Г.Н. Чусавитина. — 2-е изд., стер. — М. : ФЛИНТА, 2014. —  
176 с.  
ISBN 978-5-89349-988-9

Пособие содержит систематизированное изложение широко распространенных понятий и методов финансовых вычислений и количественного анализа финансовых операций. Базовые разделы финансовой математики и опирающиеся на них прикладные финансовые расчеты сопровождаются использованием технологии табличного процессора Microsoft Excel.

Для студентов экономических факультетов вузов, специалистов, применяющих финансовые вычисления в своей работе.

УДК 336(075.8)  
ББК 65.052я73

ISBN 978-5-89349-988-9

© Издательство «ФЛИНТА», 2014

## ВВЕДЕНИЕ

Математическая экономика — это наука, которая использует математический аппарат в качестве метода исследования экономических систем и явлений. Таким образом, объектом изучения (или предметной областью) математической экономики является экономика как часть бытия или часть обширной области человеческой деятельности. Специфика математической экономики, ее методологическая особенность заключаются в том, что она изучает не сами экономические объекты и явления как таковые, а их математические модели. Ее цель — получение объективной экономической информации и выработка имеющих важное практическое значение рекомендаций. При изучении курса «Математическая экономика» на экономических специальностях вузов выделяют следующие разделы:

1. Финансовая математика (модели и методы финансово-экономических расчетов).
2. Теория риска и моделирование рискованных ситуаций.
3. Основы страховой математики и актуарные расчеты.
4. Математическое программирование в экономике.
5. Экономико-математическое моделирование.

Настоящее учебное пособие «**Основы финансовой математики**» содержит систематизированное изложение широко распространенных понятий и методов финансовых вычислений и количественного анализа финансовых операций.

Предметом финансовой математики являются проверенные практикой методы количественного финансового анализа. Количественный финансовый анализ — одно из самых динамичных направлений экономической науки — сформировался на стыке науки о финансах и математики.

Собственно финансовая математика представляет собой совокупность методов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их возвратного движения в процессе воспроизводства. Со структурной точки зрения — это стройная система аналитических формул и способов исчисления.

Объектом исследования финансовой математики являются финансовые операции, а также определенный круг методов вы-

числений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях финансовой операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров, а именно:

- стоимостные характеристики (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов, стоимости фондов, объемы денежных средств и т.д.);
- временные данные (даты или сроки выплат, продолжительность периодов начисления или отсрочки платежей и т.д.);
- параметры, определяющие изменение стоимостных характеристик (процентные ставки).

К основным задачам финансовой математики относятся:

- измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракты) для каждой из участвующих сторон;
- разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения кредитов;
- выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, измерение взаимосвязи этих параметров, определение их допустимых граничных значений;
- нахождение параметров эквивалентного изменения условий операции;
- определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции и др.

Разумеется, данный перечень не является исчерпывающим. Современная практика ставит новые задачи. Свидетельством важности дальнейшего развития финансового анализа служит тот факт, что несколько последних Нобелевских премий по экономике присуждены за работы именно в этой области знаний.

Следует отметить, что сегодня в условиях рыночной экономики в России началось активное возрождение финансовой математики. С одной стороны, в мировой финансовой науке в течение XX века интенсивно развивались различные математические методы расчетов, появилась международная система унифицированных математических обозначений для стандартных финансовых схем. С другой стороны, бурное развитие индустрии персональных компьютеров и повсеместное внедрение компьютерных техноло-

гий привели к тому, что программы расчета основных финансовых показателей реализованы в электронных таблицах на уровне, понятном широкому кругу пользователей персонального компьютера. К настоящему времени финансовая математика в России получила широкое распространение благодаря работам Г.П. Башарина, А.В. Бухвалова, Т.В. Ващенко, А.В. Идельсона, В.В. Капитоненко, В.В. Ковалева, Е. Кочовича, Я.С. Мелкумова, С.В. Мирошкиной, В.А. Морошкина, Г.Б. Поляка, В.Н. Румянцева, В.М. Симчера, Е.С. Стояновой, О.Ю. Ситниковой, В.А. Уланова, В.Е. Черкасова, Е.М. Четыркина и др.

Учебных пособий и других изданий, посвященных финансовым вычислениям, в России много, но они по преимуществу усложнены и громоздки. Это создает определенные трудности не только в понимании, но и в применении методов финансовых вычислений на практике, когда необходимо аргументированно, опираясь на системные знания предмета, защищать свои финансовые интересы.

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть посвящена основам традиционной финансовой математики. В ней дана теория процентных ставок. По мере изложения материала происходит знакомство с финансовыми функциями Microsoft Excel.

Во второй части приведены методы расчета различных финансовых потоков (потоков платежей), изложены основные критерии оценки инвестиционных проектов, рассмотрение сопровождается графиками и расчетами в электронных таблицах.

Использованный в книге материал прошел апробацию в лекциях по математической экономике, математическим методам финансового анализа, прочитанных автором на факультетах информатики и физико-математическом Магнитогорского государственного университета для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная информатика в экономике» и «Математические методы в экономике» соответственно. Учебное пособие может быть полезно для специалистов, применяющих финансовые вычисления в своей работе, преподавателей и студентов очного и заочного отделений экономических специальностей вузов.

## Глава 1 ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ

### 1.1. Методы учета фактора времени в финансовых операциях

В основе финансовой математики лежит **понятие временной стоимости денег** (time value of money), то есть принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Данный принцип является краеугольным камнем в современном финансовом менеджменте [3; 4; 5; 7 и др.]. Согласно этому принципу, сегодняшние поступления ценнее будущих. Соответственно будущие поступления обладают меньшей ценностью по сравнению с современными. Иными словами, «золотое» правило бизнеса гласит: **«Сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра»**.

Поясним данное правило на следующем условном примере.

#### ✍ Пример 1.1.1

Предположим, что некто Х обладает суммой  $PV^* = 10000$ , которую он может положить в банк на депозит под 10% годовых.

В идеальном случае (отсутствие инфляции, налогообложения, риска неплатежеспособности банка и т.д.) проведение этой операции обеспечит получение через год суммы, равной уже 11000:

$$FV = (10000 + 10000 \cdot 0,1) = 10000 (1 + 0,1) = 11000.$$

Если указанная сумма (10000) окажется в распоряжении Х только через год, он будет вынужден отложить или даже отменить осуществление этой операции, теряя тем самым возможность получить доход в 1000.

Очевидно, что с этой точки зрения сумма  $PV^* = 10000$ , получение которой ожидается только через год, является в данной ситуации для Х менее ценной по сравнению с эквивалентной

суммой, имеющейся к текущему моменту времени, поскольку обладание последней связано с возможностью заработать дополнительный доход (1000) и увеличить свои средства до 11000.

В этом же смысле текущая стоимость будущих 10000 для Х эквивалентна той сумме, которую необходимо поместить в банк под 10% чтобы получить их год спустя:

$$10000 / (1 + 0,1) = 9090,91.$$

Продемонстрированная **неравноценность** двух одинаковых по величине, но разных по времени ( $t_0 \neq t_1$ ) получения денежных сумм — явление, широко известное и осознанное в финансовом мире. Его существование обусловлено целым рядом причин. Вот лишь некоторые из них:

- любая имеющаяся в наличии денежная сумма в условиях рынка может быть немедленно инвестирована и спустя некоторое время принести доход;
- даже при небольшой инфляции покупательная способность денег со временем снижается;
- предпочтение в общем случае индивидуумами текущего потребления будущему и др.

Из принципа временной ценности денег вытекают, по крайней мере, два важных следствия:

- необходимость учета фактора времени при проведении финансовых операций;
- некорректность (с точки зрения анализа долгосрочных финансовых операций) суммирования денежных величин, относящихся к разным периодам времени.

Таким образом, необходимость учета фактора времени при проведении финансовых операций требует применения специальных количественных методов его оценки.

### *Наращение и дисконтирование*

В финансовых расчетах учет фактора времени осуществляется с помощью методов **наращения** и **дисконтирования**, в основу которых положена техника процентных вычислений. С помощью этих методов осуществляется приведение денежных сумм, относящихся к различным временным периодам, к требуемому

\* В англоязычной литературе для обозначения текущей стоимости капитала традиционно используется буквосочетание *PV* (от *Present Value of Money* — настоящая стоимость денег), для стоимости наращенной суммы *FV* (от *Future Value of Money* — будущая стоимость денег).

моменту времени в настоящем или будущем. При этом в качестве нормы приведения используется показатель, называемый **ставкой** и определяемый отношением **процентных денег**, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу. Это отношение выражается в десятичных дробях или в процентах.

Под **процентными деньгами**, или процентами, понимается абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции.

Эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована **ставкой**.

**Процентная ставка** (interest rate —  $r$ ) определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к величине исходного капитала:

$$r = \frac{FV - PV}{PV}, \quad (1.1.1)$$

где  $PV$  — настоящая стоимость;

$FV$  — будущая стоимость.

В финансовых вычислениях данный показатель имеет и другие названия — «ставка процента», «процент», «рост», «норма прибыли».

В узком смысле процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств. Однако в финансовых расчетах ее также часто используют в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к величине вложенных средств.

**Учетная ставка** (discount rate —  $d$ ) определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к ожидаемой к получению (возвращаемой) сумме денежных средств:

$$d = \frac{FV - PV}{FV}. \quad (1.1.2)$$

В финансовых вычислениях данный показатель так же называют «дисконт».

Не трудно вывести соотношение между ставками:

$$r = \frac{d}{1 + d} \quad \text{или} \quad d = \frac{r}{1 + r}. \quad (1.1.3)$$

Таким образом, эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована ставкой.

В любой простейшей финансовой сделке всегда присутствуют три величины, две из которых заданы, а одна является искомой (рис. 1.1.1).

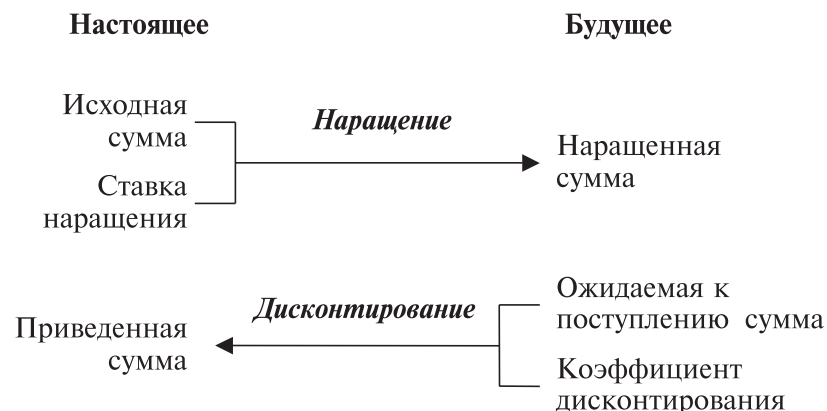


Рис. 1.1.1. Логика финансовых операций

Под **наращением** понимают процесс увеличения первоначальной суммы в результате начисления процентов. Экономический смысл метода наращивания состоит в определении величины, которая будет или может быть получена из некоторой первоначальной (текущей) суммы в результате проведения финансовой операции.

Другими словами, метод наращивания позволяет определить будущую величину  $FV$  текущей суммы  $PV$  через некоторый промежуток времени исходя из заданной процентной ставки  $r$ .

При проработке различного рода финансовых операций нередко приходится решать обратную задачу: известно, какая сумма в будущем нужна для получения некоторого результата, необходимо найти ее текущее значение. Иными словами: какую

сумму нужно инвестировать сегодня, чтобы через определенный промежуток времени получить заданное значение? Для обозначения данного процесса используется термин **дисконтирование**, под которым понимается нахождение стоимостной величины  $PV$  на заданный момент времени по ее известному или предполагаемому значению в будущем  $FV$ . Название термина происходит от слова «дисконт» — скидка с цены долгового обязательства при авансированной выплате процентов за пользование кредитом.

В экономическом смысле величина  $PV$ , найденная в процессе дисконтирования, показывает современное (с позиции текущего момента времени) значение будущей величины  $FV$ . Не трудно заметить, что дисконтирование, по сути, является зеркальным отражением наращенного. Используемую при этом процентную ставку  $r$  называют **нормой дисконта**.

Таким образом, процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется **процессом наращенного**, искомая величина называется **наращенной суммой**, а ставка — **ставкой наращенного**. Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка, называется **процессом дисконтирования**, искомая величина называется **приведенной суммой**, а ставка — **ставкой дисконтирования**. В качестве ставки наращенного или дисконтирования может выступать как процентная, так и учетная ставка.

Отношение текущей суммы к будущей величине называют **дисконт-фактором**:

$$r = \frac{FV - PV}{PV}. \quad (1.1.1)$$

Удобной и наглядной характеристикой (особенно при оценке вклада) является **индекс роста** суммы за данный период ( $B_t$ ), показывающий, во сколько раз выросла величина капитала по отношению к величине капитала в конце предыдущего периода:

$$d = \frac{FV - PV}{FV}. \quad (1.1.2)$$

### Пример 1.1.2

Предприниматель получил на полтора года кредит в размере 40 тыс. руб. с условием возврата 50 тыс. руб. Определите процентную ставку, учетную ставку и дисконт-фактор за полтора года. Чему равен индекс роста суммы кредита?

**Решение.** Полагая в формуле (1.1.1)  $t = 1,5$  года,  $PV = 40$  тыс. руб.,  $FV = 50$  тыс. руб., получим величину процентной ставки за полтора года:

$$r_{1,5} = \frac{50 - 40}{40} = 0,25, \text{ или, что равносильно, } r_{1,5} = 25\%.$$

Аналогичным образом находим учетную ставку и дисконт-фактор:

$$d_{1,5} = \frac{50 - 40}{40} = 0,2 \text{ или, } d_{1,5} = 20\%;$$

$$v_{1,5} = \frac{40}{50} = 0,8 \text{ или, } v_{1,5} = 80\%.$$

Заметим, что величины  $d_{1,5}$ ,  $v_{1,5}$  можно было найти, используя и другие соотношения. Например:

$$d_{1,5} = \frac{r_{1,5}}{1 + r_{1,5}} = \frac{0,25}{1 + 0,25} = 0,2;$$

$$v_{1,5} = 1 - d_{1,5} = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Индекс роста  $B_{1,5}$  суммы кредита показывает, во сколько раз возвращаемая сумма больше выданной:

$$B_{1,5} = \frac{50}{40} = 1,25.$$

Число, равное сумме начального числа и начисленных на него процентов, называется **наращенным числом**. Число, равное разности между начальным числом и начисленными на него процентами, называется **уменьшенным числом**.

Проценты по отношению к начальному числу называются процентами «со 100», а проценты по отношению к наращенному числу называются процентами «на 100».

Формула вычисления процентов «со 100»:

$$Q' = Q \cdot r. \quad (1.1.6)$$

Формула вычисления процентов «на 100»:

$$S' = \frac{S \cdot r}{1 + r}. \quad (1.1.7)$$

Проценты «на 100» находят в задачах следующего типа: даны ставка процента и сумма двух слагаемых, одно из которых представляет собой проценты «со 100» другого; требуется найти одно из слагаемых.

Проценты по отношению к уменьшенному числу называются процентами «во 100».

Формула вычисления процентов «во 100»:

$$K' = \frac{K \cdot r}{1 - r}. \quad (1.1.8)$$

Проценты «во 100» находят в задачах следующего типа: даны ставка процента и разность двух слагаемых, одно из которых (вычитаемое) представляет собой проценты «со 100» другого; требуется найти одно из слагаемых.

✍ *Пример 1.1.3*

Найдите с 90 тыс. руб.: а) 15% «со 100»; б) 15% «на 100»; в) 15% «во 100».

*Решение.* Выражая 15% в десятичных дробях (т.е. получая 0,15), пользуемся последовательно формулами (1.1.6—1.1.8) при  $r = 0,15$  и  $Q = S = K = 90$  тыс. руб.:

а)  $Q' = 90 \cdot 0,15 = 13,5$  тыс. руб.;

б)  $S' = \frac{90 \cdot 0,15}{1 + 0,15} = 11,739$  тыс. руб.;

в)  $K' = \frac{90 \cdot 0,15}{1 - 0,15} = 15,882$  тыс. руб.

Получили, что по отношению к одному числу проценты «на 100» меньше процентов «со 100», которые, в свою очередь, меньше процентов «во 100».

Для проверки найденных процентов «на 100» надо из данного числа (90 тыс. руб.) вычесть полученные проценты «на 100» (11,739 тыс. руб.), определив тем самым так называемое началь-

ное число. Затем от начального числа найти проценты «со 100», которые должны совпадать с найденными согласно условию задачи процентами «на 100». Выполним эти действия:

$$90 - 11,739 = 78,261 \text{ тыс. руб.};$$

$$78,261 \cdot 0,15 = 11,739 \text{ тыс. руб.}$$

Для проверки найденных процентов «во 100» надо к данному числу (90 тыс. руб.) прибавить полученные проценты «во 100» (15,882 тыс. руб.) и затем от найденной суммы (т.е. начального числа 105,882 тыс. руб.) найти проценты «со 100»:

$$90 + 15,882 = 105,882 \text{ тыс. руб.};$$

$$105,882 \cdot 0,15 = 15,882 \text{ тыс. руб.}$$

## 1.2. Простые проценты

В финансовых расчетах используются следующие виды процентных ставок:

- в зависимости от базы для начисления процентов различают **простые** (постоянная база) и **сложные проценты** (переменная база);
- по принципу расчета различают **ставку наращения** — декурсивную ставку и **учетную ставку** — антисипативную ставку;
- по постоянству значения процентной ставки в течение действия финансовой операции — **фиксированные** и **плавающие** (фиксируется ли изменяющаяся во времени база и размер надбавки к ней — маржи).

Рассмотрим основные типы моделей финансовых расчетов на основе простых процентов.

### *Наращение простыми процентами*

В общем случае, наращение по ставке простых процентов осуществляют по следующей формуле (*наращение может также осуществляться по учетной ставке d*):

$$FV = PV + PV \cdot r \cdot n = PV \cdot (1 + r \cdot n), \quad (1.2.1)$$

где  $n$  — число периодов;

$r$  — ставка процентов.

График роста по простым процентам представлен на рис. 1.2.1.

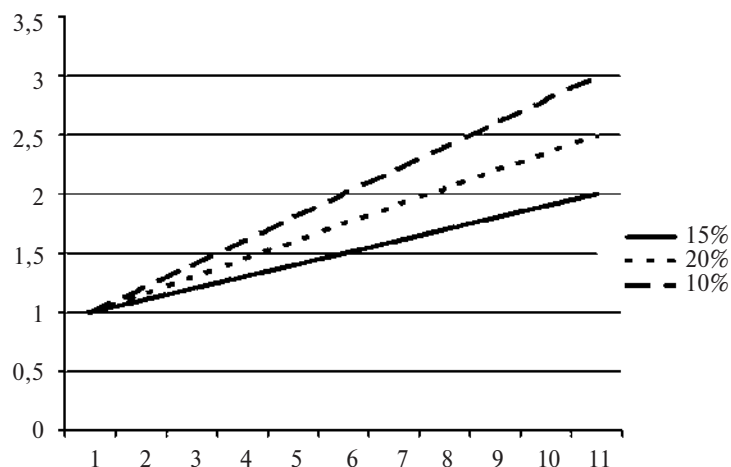


Рис. 1.2.1. График наращения по простым процентам

#### Пример 1.2.1

Вы поместили в банк вклад 10 тыс. руб. под простую процентную ставку 26% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 3 года? Какова будет величина начисленных процентов? Если банк осуществляет регулярные выплаты начисленных процентов, то какую сумму вы будете получать: а) каждый год; б) каждый квартал?

**Решение.** Полагая в формуле (1.2.1)  $PV = 10$  тыс. руб.,  $n = 3$  года,  $r = 0,26$ , получим наращенную сумму через 3 года, если не происходят выплаты простых процентов:

$$FV = 10 \cdot (1 + 3 \cdot 0,26) = 17,8 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, величина начисленных процентов составит:

$$r = FV - PV = 17,8 - 10 = 7,8 \text{ тыс. руб.}$$

Величина начисленных простых процентов, выплачиваемых ежегодно равна ( $l = 3$ )  $r = 7,8/3 = 2,6$  тыс. руб. При ежеквартальных выплатах  $l = 0,25$  года, и поэтому величина каждой выплаты составит:

$$r = 0,25 \cdot 0,26 = 0,65 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что проценты на уже начисленные проценты не начисляются независимо от срока хранения вклада. Поэтому име-

ет смысл начисленные простые проценты регулярно получать и использовать, например, для иных инвестиций.

В формуле 1.2.1 величину  $1 + r \cdot n$  (1.2.2) называют **множителем (коэффициентом) наращения**, или аккумулярующим множителем. Множитель наращения не зависит от величины начальной суммы и показывает, во сколько раз вырос первоначальный капитал.

В случае когда продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет  $n$ , наращение по простым процентам определяется по формуле:

$$FV = PV \cdot (1 + \frac{t}{T} r), \quad (1.2.3)$$

где  $t$  — продолжительность финансовой операции в днях;

$T$  — временная база — количество дней в году.

При проведении финансовых операций возможны различные варианты расчетов в зависимости от значений  $t$  и  $T$ .

Временную базу ( $T$ ) можно представить по-разному:

- условно состоящую из 360 дней (12 месяцев в году по 30 дней в каждом). В этом случае речь идет об **обыкновенном** (ordinary interest), или **коммерческом, проценте**;
- взять действительное число дней в году (365 или 366 дней). В этом случае получают **точный процент** (exact interest).

Число дней финансовой операции ( $t$ ) также можно по-разному определять:

- условно, исходя из того, что продолжительность любого целого месяца составляет 30 дней, а оставшиеся дни от месяца считают точно, — в результате получают так называемое **приближенное** число дней финансовой операции;
- используя прямой счет или специальные таблицы порядковых номеров дней года, рассчитывают фактическое число дней между датами — в этом случае получают **точное** число дней.

Таким образом, если время финансовой операции выражено в днях, то расчет простых процентов может быть произведен одним из трех возможных способов:

- точный процент с точным числом дней, обозначаемый условно как **365/365**, или **АСТ/АСТ**, или «английская прак-

тика расчета». Этот способ применяется коммерческими банками многих стран, например, в Великобритании, в Португалии, США;

- обыкновенные проценты с точным числом дней, обозначаемые как **365/360**, или **ACT/360** ( $t$  — точное,  $T = 360$ ), или «французская практика расчета». Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии;
- обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаемые как **360/360** ( $t$  — приближительное, считается, что в месяце 30 дней,  $T = 360$ ). Этот способ часто называют «германская практика расчета». Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании.

Следует помнить о том, что при определении продолжительности финансовой операции дата начала и дата окончания финансовой операции считаются за один день.

#### Пример 1.2.2

Предпринимателю 14 февраля была предоставлена ссуда в размере 20 тыс. руб. с погашением 14 июля того же года под процентную ставку 30% годовых. Рассчитайте различными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год невисокосный.

**Решение.** Величина уплачиваемых процентов за пользование ссудой зависит от числа дней, которое берется в расчет. Для упрощения процедуры расчета точного числа дней без использования компьютера применяются специальные таблицы (одна — для обычного года, вторая — високосного), в которых все дни в году последовательно пронумерованы. Продолжительность финансовой операции определяется вычитанием номера первого дня из номера последнего дня.

Находим по таблице порядковых номеров дней в обычном году (Прил. В) точное число дней финансовой операции, рассматриваемой в нашей задаче:  $195 - 45 = 150$  дней. Естественно, это число можно найти и непосредственно, исходя из количества дней в соответствующих месяцах.

Приближенное число дней ссуды состоит из 16 дней февраля ( $30 - 14$ ); 120 дней (по 30 дней четырех месяцев: март, апрель,

май, июнь) и 14 дней июля. То есть приближенное число дней составляет:  $16 + 120 + 14 = 150$ . Теперь с помощью формулы (1.2.3) можно рассчитать возможные значения суммы к погашению. Во всех случаях  $PV = 20$  тыс. руб.,  $r = 0,3$ .

1. **365/365** или **ACT/ACT**. В расчет принимаются точные проценты и точное число дней ссуды (т.е.  $T = 365$ ,  $t = 150$ ):

$$FV = 20 \left(1 + \frac{150}{365} \cdot 0,3\right) = 22,46575 \text{ тыс. руб.}$$

2. **365/360** или **ACT/360**. В расчет принимаются обыкновенные проценты и точное число дней ссуды (т.е.  $T = 360$ ,  $t = 150$ ):

$$FV = 20 \left(1 + \frac{150}{360} \cdot 0,3\right) = 22,5 \text{ тыс. руб.}$$

3. **360/360**. В расчет принимаются обыкновенные проценты и приближенное число дней ссуды (т.е.  $T = 360$ ,  $t = 150$ ):

$$FV = 20 \left(1 + \frac{150}{360} \cdot 0,3\right) = 22,5 \text{ тыс. руб.}$$

Очевидно, что обыкновенные проценты и точное число дней ссуды доставляют большее значение суммы к погашению, чем точные проценты и точное число дней ссуды. В условиях этого примера второй и третий варианты расчета обеспечивают одинаковые суммы при возврате долга. Вообще, как правило, число точных и число приближенных дней краткосрочной (до одного года) ссуды либо очень близки, либо совпадают, что позволяет в банковских расчетах обычно пользоваться приближенным числом дней ссуды. Однако при больших величинах ссуд даже небольшие расхождения могут иметь значение.

Отметим, что число точных и число приближенных дней ссуды могут достаточно сильно отличаться друг от друга, если срок ссуды более 360 дней. Если, например, ссуда предоставлена с 14 февраля одного года до 13 февраля следующего, то точное число дней равно 364, а приближенное — 359. Отсюда следуют и более существенные различия в суммах к погашению.

Если общий срок финансовой операции захватывает два смежных календарных периода и есть необходимость в делении суммы процентов между ними (например, при определении го-

довых сумм дохода и т.д.), то общая сумма начисленных простых процентов составит сумму процентов, полученных в каждом году:

$$I = I_1 + I_2 = PV \cdot n_1 \cdot r + PV \cdot n_2 \cdot r, \quad (1.2.4)$$

где  $I$  — проценты за весь срок финансовой операции;  
 $n_1$  и  $n_2$  — части срока, приходящиеся на каждый календарный год.

### Переменные ставки

Финансовое соглашение может не только предусматривать постоянную процентную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени переменную ставку. В этом случае проценты рассчитываются отдельно для каждого периода, в течение которого ставка постоянна, а затем в конце срока рассчитанные для каждого периода проценты суммируются.

$$FV = PV(1 + n_1 r_1 + n_2 r_2 + \dots + n_m r_m) = PV(1 + \sum_i n_i r_i). \quad (1.2.5)$$

#### ✍ Пример 1.2.3

Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год — 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Найти множитель наращенного за 2,5 года.

*Решение.* Находим

$$1 + \sum n_i r_i = 1 + 1 \cdot 0,16 + 0,5 \cdot 0,17 + 0,5 \cdot 0,18 + 0,5 \cdot 0,19 = 1,43.$$

Принципиально ничего не меняется, если сумма, на которую начисляют проценты, изменяет свою величину во времени. В этом случае:

$$I = \sum PV_j n_j r_j, \quad (1.2.6)$$

где  $PV_j$  — остаток средств на счете в момент  $j$  после очередного поступления или списания средств;

$n_j$  — срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счете.

В банковско-сберегательном деле обычно применяют способ, основанный на преобразовании (1.2.6). Для чего измеряют интервалы между моментами изменений величины остатка на счете в днях, а процентную ставку выражают в процентах (а не в десятичных дробях, как мы это делали раньше). В результате чего получается:

$$I = \sum PV_j n_j r_j = \frac{\sum PV_j \cdot t_j}{100} : \frac{T}{r}. \quad (1.2.7)$$

Как и прежде  $T$  — временная база начисления процентов (365, 366 или 360),  $t_j$  — срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете.

Величину  $\frac{\sum PV_j \cdot t_j}{100}$ , равную произведению размера капитала на время, в течение которого происходит наращение на капитал простых процентов, деленное на 100 — называют процентным числом (interest number).

А делитель, равный отношению принятого числа дней в году к процентной ставке, — **дивизором** (interest divisor) или процентным (постоянным) делителем. Численно дивизор равен такому количеству рублей, с которого при данной процентной ставке получается 1 руб. дохода в день.

$$D' = \frac{T}{r}. \quad (1.2.8)$$

#### ✍ Пример 1.2.4

Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 05.02 поступило 12 млн руб., 10.07 снято 4 млн руб.; 20.10 поступило 8 млн руб. Найти сумму на счете на конец года. Процентная ставка 18% годовых.

*Решение.* Сумма на счете в конце года находится как

$$FV = PV + I.$$

Найдем  $I$  — проценты за весь срок финансовой операции. Дивизор (процентный делитель) при расчете точных процентов составит  $365/18 = 20,27778$ . Расчет суммы процентных чисел приведен в табл. 1.2.1.

Таблица 1.2.1

## РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

| Дата                               | Движение средств | Остаток (PVj) | Срок (tj) | Процентное число |
|------------------------------------|------------------|---------------|-----------|------------------|
| 05.фев                             | 12               | 12            | 155       | 18,6             |
| 10.июл                             | −4               | 8             | 102       | 8,16             |
| 20.окт                             | 8                | 16            | 72        | 11,52            |
| 31.дек                             |                  | 16            |           |                  |
| Итого                              |                  |               |           | 38,28            |
| Сумма процентов за весь срок равна |                  |               | 1,888     |                  |
| Сумма на счете на конец года       |                  |               | 17,888    |                  |

Для сравнения доходности финансовых операций с различными сроками используют показатели, учитывающие временной период, в течение которого получен доход. Одним из показателей является **эквивалентное значение** простой годовой процентной ставки. При этом считается, что если в результате инвестирования некоторой суммы получен доход, то такой же доход можно получить в результате размещения той же суммы по соответствующей эквивалентной простой годовой процентной ставке.

## ✍ Пример 1.2.5

Некто N поместил в банк 16 тыс. руб. на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 24% годовых, каждый последующий квартал ставка повышается на 3%. Найдите наращенную сумму за полтора года, если проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада. При какой постоянной процентной ставке можно получить такую же наращенную сумму? Найдите наращенную сумму за полтора года, если с изменением ставки происходит одновременно и капитализация процентного дохода.

**Решение.** Пусть вначале проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада. Рассмотрим отдельно периоды, в течение которых ставка была постоянной.

Поскольку на первый период длительностью  $n_1 = 0,5$  года установлена процентная ставка  $r_1 = 0,24$ , то приращение капитала

(в тыс. руб.) за этот период равно величине  $16 \cdot 0,5 \cdot 0,24$ . На второй период длительностью  $n_2 = 0,25$  года (квартал) установлена процентная ставка  $r_2 = 0,24 + 0,03 = 0,27$ , и, следовательно, приращение капитала за этот период равно величине  $16 \cdot 0,25 \cdot 0,27$ .

Аналогичным образом на периоды  $n_3, n_4, n_5$ , каждый из которых равен 0,25 года, установлены соответственно ставки  $r_3 = 0,3$ ,  $r_4 = 0,33$ ,  $r_5 = 0,36$ , доставляющие приращения капитала:

$$16 \cdot 0,25 \cdot 0,3; 16 \cdot 0,25 \cdot 0,33; 16 \cdot 0,25 \cdot 0,36.$$

Суммируя первоначальный капитал и все его приращения, получим наращенную сумму за полтора года (общий множитель всех слагаемых 16 вынесем за скобки):

$$FV = 16 \cdot (1 + 0,5 \cdot 0,24 + 0,25 \cdot 0,27 + 0,25 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,33 + 0,25 \cdot 0,36) = 22,96 \text{ тыс. руб.}$$

Такую же наращенную сумму можно получить, если простые проценты начисляются за полтора года по ставке

$$r' = \frac{0,5 \cdot 0,24 + 0,25 \cdot 0,27 + 0,25 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,33 + 0,25 \cdot 0,36}{1,5} = 0,29.$$

Действительно,  $FV = 16 \cdot (1 + 1,5 \cdot 0,29) = 22,96$  тыс. руб.

**Дисконтирование по простым процентам**

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме  $FV$ , которую следует уплатить через некоторое время  $n$ , необходимо определить сумму полученной ссуды  $PV$ . Такая задача может возникнуть, например, при разработке условий контракта.

Расчет  $PV$  по  $FV$  необходим и тогда, когда проценты с суммы  $FV$  удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма  $FV$  **дисконтируется** или **учитывается**, сам процесс начисления процентов и их удержание называется учетом, а удержание процентов — дисконтом, или скидкой.

Термин **дисконтирование** употребляется и в более широком смысле: как средство определения любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени.

Такой прием называют приведением стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени.

Величину  $PV$ , найденную с помощью дисконтирования, называют **современной стоимостью**, или современной величиной, будущего платежа  $FV$ , а иногда — текущей или капитализированной стоимостью.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два вида дисконтирования — **математическое дисконтирование** и **банковское дисконтирование** (коммерческий учет, учет векселей). В первом случае применяется процентная ставка  $r$ , во втором — учетная ставка  $d$ .

**Математическое дисконтирование** является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (называемой приведенной стоимостью), которая через заданное время при наращении простыми процентами по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через это заданное время.

Формула нахождения приведенной стоимости (при использовании простой ставки) имеет вид:

$$PV = \frac{FV}{1 + n \cdot r} \quad (1.2.9)$$

Напомним, что  $n$  — срок ссуды в годах.

Установленная таким путем величина  $PV$  является современной величиной суммы  $FV$ , которая будет выплачена спустя  $n$  лет.

Дробь  $1/(1 + n \cdot r)$  называют **дисконтным** или **дисконтирующим** множителем. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

✍ **Пример 1.2.6**

Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. руб. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням?

**Решение.** Согласно формуле (1.2.9) находим первоначальную сумму долга:

$$PV = \frac{310000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0,16} = 287328,59 \text{ руб.}$$

Суть **банковского дисконтирования** заключается в следующем. Банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока погашения векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. В свою очередь, владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако ранее указанного на нем срока.

При учете векселя применяется *банковский*, или *коммерческий*, учет. Согласно этому методу, проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется *учетная ставка  $d$* .

Формула дисконтирования по простой учетной ставке имеет вид:

$$PV = FV \cdot (1 - n \cdot d). \quad (1.2.10)$$

Дисконтный множитель здесь равен  $(1 - nd)$ . Из формулы (1.2.10) следует, что при  $n > 1/d$  величина дисконтного множителя и, следовательно, суммы  $PV$  станут отрицательной.

✍ **Пример 1.2.7**

В банк 6 мая предъявлен для учета вексель на сумму 14 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, используя способ 365/360. За какое время до срока платежа операция учета векселя по учетной ставке 40% годовых имеет смысл?

**Решение.** Величина суммы, полученной векселедержателем, рассчитывается по формуле (1.2.10) и при  $FV = 14$  тыс. руб.,

$n = \frac{65}{360}$  года,  $d = 0,4$  составит:

$$PV = 14 \cdot \left(1 - \frac{65}{360} \cdot 0,4\right) = 12,989 \text{ тыс. руб.}$$

Учет векселя по учетной ставке  $d$  имеет смысл, если  $n < \frac{1}{d}$ ,

т.е. для данного случая  $n < 2,5$  года.

Если  $n = 2,5$  года, то  $PV = 14 \cdot (1 - 2,5 \cdot 0,4) = 0$ , т.е. владелец векселя вообще ничего не получит. При  $n > 2,5$  сумма  $PV$ , которую должен получить при учете векселя его владелец, становится отрицательной, что не может иметь места.

Банковское дисконтирование (в отличие от математического) нельзя осуществить во всех ситуациях (например, по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа). Математическое дисконтирование выгоднее для векселедержателя, а банковское дисконтирование — для банка.

Если специальным образом не оговорены условия, вексель, как правило, учитывается по простой учетной ставке, и при этом используются обыкновенные проценты. Удержание простых процентов в момент предоставления ссуды можно рассматривать как соглашение между кредитором и должником о том, что наращение будет осуществляться по простой учетной ставке. Аналогичное соображение можно высказать и относительно операции учета векселя.

При применении наращения на основе простой учетной ставки величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается, в то время как при наращении капитала на основе простой процентной ставки капитал ежегодно увеличивается на одну и ту же величину. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

Финансовый результат, полученный с помощью простой учетной ставки, можно получить и с помощью эквивалентной ей простой процентной ставки. Финансовое соглашение может не только предусматривать постоянную учетную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (*переменную*) ставку.

### Наращение по учетной ставке

Можно рассмотреть задачу, обратную к банковскому дисконтированию. Пусть от учета капитала  $FV$  по учетной ставке  $d$  за время  $n$  была получена сумма  $PV$ . Требуется определить величину  $FV$ . Из формулы (1.2.10) получим:

$$FV = \frac{PV}{1 - nd}. \quad (1.2.11)$$

Задачи такого типа возникают, например, когда необходимо определить сумму, которую следует вписать в вексель, если задана текущая величина долга.

#### Пример 1.2.8

Вексель на сумму 18 тыс. руб., выданный 14 мая и сроком погашения 20 ноября этого же года, был учтен в банке 10 октября по учетной ставке 36 % годовых способом 365/360. На номинальную стоимость векселя предусматривалось начисление простых процентов по процентной ставке 25% годовых способом 365/365. Найдите сумму, полученную векселедержателем. Провести анализ дохода банка. Год високосный.

*Решение.* Поскольку на 18 тыс. руб. будут начислены простые проценты за 190 дней, то вначале по формуле (1.2.3) находим сумму, которая должна быть выплачена предъявителю векселя при его погашении:

$$FV = 18 \cdot \left( 1 + \frac{190}{366} \cdot 0,25 \right) = 20,336 \text{ тыс. руб.}$$

Поскольку вексель был учтен за 41 день до срока погашения, то по формуле (1.2.10) владелец векселя получит сумму:

$$PV = 20,336 \cdot \left( 1 - \frac{41}{360} \cdot 0,36 \right) = 19,502 \text{ тыс. руб.}$$

В данном случае можно провести более глубокий анализ процесса учета векселя. Общий доход банка составит величину:

$$I = FV - PV = 20,336 - 19,502 = 0,834 \text{ тыс. руб.}$$

Этот доход складывается из двух частей — проценты по векселю, причитающиеся за время, оставшееся до момента погашения векселя, и собственно комиссионные за предоставленную услугу.

Найдем срочную стоимость векселя в момент учета его банком:

$$\bar{P}V = 18 \cdot \left(1 + \frac{149}{366} \cdot 0,25\right) = 19,832 \text{ тыс. руб.}$$

Теперь можно определить проценты по векселю, составляющие часть дохода банка:

$$\Delta_p = FV - \bar{P}V = 20,336 - 19,832 = 0,504 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, собственно комиссионные, получаемые банком за услугу, оказываемую векселедержателю, составят величину:

$$\Delta_c = \Delta - \Delta_p = 0,834 - 0,504 = 0,33 \text{ тыс. руб.}$$

Величину  $\Delta_c$  можно было найти и по формуле  $\Delta_c = \bar{P} - P$ .

С позиции банка сумма 330 руб. представляет собой плату за возможность более быстрого получения наличных векселедержателем. Отметим, что реальные потери векселедержателя составляют именно величину 330 руб., а не 834 руб., как это кажется на первый взгляд. Конечно, банк может получить больше 330 руб., увеличивая учетную ставку.

Следует отметить, что если бы учетная ставка была, допустим, 30 % годовых, а процентная — 40% годовых, то банк оказался бы в проигрыше. Действительно:

$$FV = 18 \left(1 + \frac{190}{366} \cdot 0,4\right) = 21,738 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV = 20,336 \left(1 - \frac{41}{360} \cdot 0,3\right) = 20,995 \text{ тыс. руб.};$$

$$\bar{P} = 18 \cdot \left(1 + \frac{149}{366} \cdot 0,4\right) = 20,931 \text{ тыс. руб.}$$

Поэтому банк потеряет величину:

$$\Delta_p - \Delta = P - \bar{P} = 20,995 - 20,931 = 0,064 \text{ тыс. руб.}$$

### Определение срока финансовой операции и величины процентной ставки

В любой простейшей финансовой операции всегда присутствуют четыре величины: современная величина ( $PV$ ), наращенная или будущая величина ( $FV$ ), ставка (процентная —  $r$  или учетная —  $d$ ) и время ( $n$ ).

Иногда при разработке условий финансовой сделки или ее анализе возникает необходимость решения задач, связанных с определением отсутствующих параметров, таких как срок финансовой операции или величина процентной или учетной ставки.

Как правило, в финансовых контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периоды начисления процентов, поскольку фактор времени в финансово-коммерческих расчетах играет важную роль. Однако бывают ситуации, когда срок финансовой операции прямо в условиях финансовой сделки не оговорен или когда данный параметр определяется при разработке условий финансовой операции.

Обычно *срок финансовой операции* определяют в тех случаях, когда известна процентная или учетная ставка и величина процентов. Если срок определяется в годах, то формула для определения срока ссуды (при использовании простой ставки) выглядит следующим образом:

$$n = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} \quad \text{или} \quad n = \frac{FV - PV}{FV \cdot d}, \quad (1.2.12)$$

а если срок сделки необходимо определить в днях, то появляется временная база в качестве множителя:

$$t = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} \cdot T \quad \text{или} \quad t = \frac{FV - PV}{FV \cdot d} \cdot T. \quad (1.2.13)$$

#### Пример 1.2.9

На сколько дней можно дать в долг 1000 долларов, исходя из 8% годовых, если возвращенная сумма будет составлять 1075 долларов?

**Решение.** Исходя из формулы (1.2.13), срок долга для простых процентов:

- для обычных процентов:

$$t = [(FV - PV) : (PV \cdot I)] \cdot T = [(1075 - 1000) / (1000 \cdot 0,08)] \cdot 360 = 338 \text{ дней};$$

- для точных процентов:

$$t = [(FV - PV) : (PV \cdot i)] \cdot T = [(1075 - 1000) / (1000 \cdot 0,08)] \cdot 365 = 342 \text{ дня}.$$

Таким образом, сумма в 1000 долларов может быть представлена на срок в 342 дня, если в условиях финансовой операции будет использован термин «точные проценты», а по умолчанию или использованию термина «обыкновенные проценты» срок ссуды сокращается до 338 дней.

Необходимость определения уровня *простой* (процентной или учетной) *ставки* возникает в тех случаях, когда она в явном виде в условиях финансовой операции не участвует, но степень доходности операции по заданным параметрам можно определить, воспользовавшись следующими формулами:

$$r = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \quad \text{или} \quad r = \frac{FV - PV}{PV \cdot t} \cdot T \quad (1.2.14)$$

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} \quad \text{или} \quad d = \frac{FV - PV}{FV \cdot t} \cdot T. \quad (1.2.15)$$

#### ✍ Пример 1.2.10

В контракте предусматривается погашение обязательств через 120 дней в сумме 1200 долларов при первоначальной сумме долга 1150 долларов. Определить доходность операции для кредитора в виде процентной ставки.

**Решение.** Рассчитываем годовую процентную ставку, используя формулу «обыкновенного процента», поскольку в условиях сделки нет ссылки на «точный процент»:

$$i = [(FV - PV) : (PV \cdot t)] \cdot T = [(1200 - 1150) / (1150 \cdot 120)] \cdot 360 = 0,13.$$

Таким образом, доходность финансовой операции составит 13% годовых.

### 1.3. Начисление простых процентов в условиях учета инфляции и налогообложения

#### Влияние инфляции на финансовые расчеты

В рассматриваемых выше методах не учитывался такой процесс, как инфляция (от латинского *inflatio* — вздутие). Иначе говоря, не принималось во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый финансовой операцией.

Например, вы хотите сделать инвестицию в 10 тыс. руб. исходя из 10% годовых. Это означает, что 10 тыс. руб. в начале года и 11 тыс. руб. в конце года имеют для вас одинаковую ценность. Если допустить, что имеет место инфляция в размере 5% в год, то, для того чтобы сохранить покупательную стоимость полученного в конце года денежного поступления 11 тыс. руб., необходимо откорректировать эту величину на индекс инфляции:

$$11 \cdot 1,05 = 11,55 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, чтобы обеспечить желаемый доход, вы должны были использовать в расчетах не 10%-ный рост капитала, а другой показатель, отличающийся от исходного на величину индекса инфляции:

$$1,1 \cdot 1,05 = 1,155, \text{ т.е. } 11,5\%.$$

Введем измеритель уровня и темпов инфляции. **Уровень инфляции** (его также называют индексом инфляции) выражается в виде индекса цен.

Индекс цен ( $I$ ) — это отношение цены  $t$ -го года ( $P_t$ ) к цене базисного года ( $P_b$ ), т.е.:

$$I = \frac{P_t}{P}. \quad (1.3.1)$$

Различают следующие основные виды индекса цен:

- индекс потребительских цен;
- индекс оптовых цен;
- индекс цен валового национального продукта (дефлятор ВВП);
- индекс экспортных и импортных цен и др.

В зависимости от характера задачи используется тот или иной индекс цен. Наиболее часто используемым показателем уровня цен является индекс потребительских цен — это отношение цены потребительской корзины в  $t$ -м году к ее цене в базисном году.

### *Индекс потребительских цен*

**Индекс потребительских цен (ИПЦ)** характеризует изменение за какой-то период стоимости потребительской корзины товаров и услуг, приобретаемых населением. Он представляет собой отношение стоимости потребительской корзины в текущий момент к ее стоимости, выраженной в ценах базисного периода (как правило, в ценах предыдущего года или месяца) и не учитывает влияние изменения доходов населения, количества и структуры его потребления. В «потребительскую корзину», приобретаемую типичным домашним хозяйством, входят основные продовольственные товары, набор основных непродовольственных товаров (одежда, обувь, бытовые товары) и основных услуг (медицинские, транспортные услуги, связь, отдых, культура, личная гигиена).

Индекс цен (индекс инфляции)

$$I_p^t = \frac{P_2}{P_1}. \quad (1.3.2)$$

где  $P_1, P_2$  — стоимости потребительской корзины в начале и конце периода длительностью  $t$ .

**Индекс покупательной способности денег**, как известно, равен обратной величине индекса цен — чем выше цены, тем ниже покупательная способность:

$$I_c^t = \frac{1}{I_p^t}. \quad (1.3.3)$$

Указанные индексы, естественно, должны относиться к одинаковым интервалам времени.

Нетрудно связать индекс цен и темп инфляции. Под **темпом инфляции**  $h$  понимается относительный прирост цен за период.

Обычно темп инфляции измеряется в процентах и определяется как:

$$h_t = \frac{P_1 - P_2}{P_1}, \quad (1.3.4)$$

где  $P_1, P_2$  — стоимости потребительской корзины в начале и конце периода длительностью  $t$ .

С помощью так называемого «правила 70» можно быстро оценить инфляцию количественно. Это правило заключается в следующем: если  $h$  — темп инфляции, выраженный в %, то  $n = 70/h$  представляет собой число периодов, за которое исходный уровень цен приблизительно удвоится.

Например, если  $h = 2\%$  в месяц, то  $n = 70/2 = 35$  месяцев; если  $h = 10\%$  в год, то  $n = 70/10 = 7$  лет.

Соотношение между индексом и темпом инфляции в начале и конце периода имеет вид:

$$I_p^{(t)} = 1 + h_t. \quad (1.3.5)$$

Инфляция является цепным процессом. Следовательно, индекс инфляции за несколько периодов равен произведению индексов инфляции за составляющие его подпериоды:

$$I_p^{(t)} = \prod_{i=1}^k I_p^{(t_i)} = \prod_{i=1}^k (1 + h_i), \quad (1.3.6)$$

где  $I_p^{(t)}(h_{t_i})$  — индекс (темп) инфляции за период  $t_i$ , подпериоды расположены последовательно друг за другом и  $t = t_1 + t_2 + \dots + t_k$ .

#### *Пример 1.3.1*

За три месяца стоимость потребительской корзины возросла с 1234 руб. до 1292 руб. Определите: а) индекс потребительских цен за три месяца; б) среднемесячный индекс потребительских цен; в) темп инфляции за три месяца; г) среднемесячный темп инфляции.

**Решение.** а) Полагая  $PV_1 = 1234$  руб.,  $PV_2 = 1292$  руб., по формуле (1.3.2) находим индекс потребительских цен за 3 месяца ( $t = 0,25$  года):

$$I_p^{(0,25)} = \frac{1292}{1234} = 1,04701.$$

Следовательно, за рассматриваемый период цены на некоторый постоянный потребительский набор товаров выросли в 4,7%

б) Обозначим через  $I_p^{(\frac{1}{12})}$  среднемесячный индекс потребительских цен (индекс инфляции). Тогда по формуле (1.3.6) при  $k=3$  получим  $I_p^{(0,25)} = \left( I_p^{(\frac{1}{12})} \right)^3$ , откуда

$$I_p^{(\frac{1}{12})} = \sqrt[3]{I_p^{(0,25)}} = \sqrt[3]{1,04701} = 1,01543.$$

в) Темп инфляции за три месяца находим из формулы (1.3.5):

$$h_{0,25} = I_p^{(0,25)} - 1 = 1,04701 - 1 = 0,04701,$$

т.е. темп инфляции, выраженный в процентах, показывает, на сколько процентов выросли цены. Такой же результат получается и по формуле (1.3.4):

$$h_{0,25} = \frac{1292 - 1234}{1234} = 0,04701.$$

г) Аналогичным образом, как и в предыдущем пункте, воспользуемся формулой (1.3.5) при  $t = \frac{1}{12}$

$$h_{\frac{1}{12}} = I_p^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,01543 - 1 = 0,01543.$$

Конечно,  $h_1$  можно найти и преобразуя формулу (1.3.6). Так как  $I_p^{(0,25)} = \left( 1 + h_{\frac{1}{12}} \right)^3$ , то

$$h_{\frac{1}{12}} = \sqrt[3]{I_p^{(0,25)}} - 1 = \sqrt[3]{1,04701} - 1 = 0,01543.$$

Для того чтобы в условиях инфляции стоимость первоначального капитала при его наращении действительно росла, исходную процентную ставку увеличивают — происходит ее индексация.

При инфляции различают следующие виды **ставок: номинальную и реальную.**

**Номинальная ставка** — это исходная базовая (как правило, годовая) ставка, указываемая в договорах. Доходность, выражаемая этой ставкой, не скорректирована на инфляцию. Номинальная ставка говорит об абсолютном увеличении денежных средств инвестора.

**Реальная ставка** показывает доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег. Реальная ставка говорит о приросте покупательной способности средств инвестора. Реальная ставка в условиях инфляции всегда меньше номинальной и может быть даже отрицательной. Положительная ставка — это любая ставка, при которой будет происходить реальное увеличение стоимости капитала при данном индексе инфляции.

Если наращение производится по простой процентной ставке, то наращенная сумма с учетом инфляции равна:

$$\bar{FV} = \frac{FV}{I_p^{(n)}} = \frac{PV(1 + n \cdot r)}{I_p^{(n)}}. \quad (1.3.7)$$

Из формулы (1.3.7) следует, что реальное наращение первоначального капитала с учетом покупательной способности денег будет только в том случае, если

$$1 + nr > I_p^{(n)}$$

Если  $1 + nr = I_p^{(n)}$ , то наращение только компенсирует действие инфляции. Из равенства (1.3.7) найдем  $r$ :

$$r = \frac{I_p^{(n)} - 1}{n} = r^* \quad (1.3.8)$$

Ставка  $r^*$  является минимально допустимой процентной ставкой, при которой не происходит реального уменьшения капитала (эрозии капитала), несмотря на начисление процентов. Ставка, превышающая  $r^*$ , называется положительной процентной ставкой, так как только в этом случае будет происходить реальное увеличение капитала.

### ✍ Пример 1.3.2

Клиент положил на депозит 16 тыс. руб. на полгода под простую процентную ставку 46% годовых. Определите реальную (по своей покупательной способности) сумму, которую получит через полгода клиент, если среднемесячный темп инфляции составлял 3%. Чему равна реальная доходность такой финансовой операции для клиента в виде годовой простой процентной ставки? При какой процентной ставке сумма на депозите реально останется постоянной?

*Решение.* По формуле (1.3.6) находим индекс инфляции за полгода:

$$I_p^{0,5} = (1 + 0,03)^6 = 1,1941.$$

По формуле (1.3.7) находим наращенную сумму с учетом ее обесценивания:

$$\overline{FV} = \frac{16 \cdot (1 + 0,5 \cdot 0,46)}{1,1941} = 16,481 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, по своей покупательной способности 16 тыс. руб. увеличатся за полгода всего на 481 руб. Следовательно, из-за инфляции реальная доходность помещения денег на депозит в виде годовой процентной ставки составит:

$$r_{real} = \frac{0,481}{16 \cdot 0,5} = 0,0601,$$

т.е. всего 6,01%, а не 46%

Сумма на депозите с учетом инфляции не изменится за полгода, если множитель наращения будет равен индексу инфляции, т.е.  $1 + nr = I_p^{(n)}$ . Поэтому:

$$r = \frac{I_p^{(n)} - 1}{n} = \frac{h_n}{n},$$

т.е. для нашего примера:  $r = \frac{1,1941 - 1}{0,5} = 0,3882$ .

Итак, процентная ставка 38,82% годовых будет просто компенсировать негативное действие инфляции за полгода, и толь-

ко при ставках, больших 38,82% (так называемых положительных процентных ставках) будет происходить (при наращении) реальное увеличение капитала.

Конечно, при сохранении темпа инфляции 3% в месяц и процентной ставке 38,82% годовых сумма на депозите за год уменьшится. Чтобы она не изменилась за год с учетом инфляции, процентная ставка должна быть больше 38,82%. Действительно, поскольку годовой индекс инфляции составит:

$$I_p^{(1)} = (1 + 0,03)^{12} = 1,4258,$$

то применяя последнюю формулу при  $n = 1$ , получим:

$$r = 1,4258 - 1 = 0,4258 = 42,58\%.$$

Для обеспечения полной компенсации негативного действия инфляции и получения доходности, согласно первоначальной ставке  $r$ , размер брутто-ставки  $\bar{r}$  определяется из равенства:

$$1 + nr = \frac{1 + n\bar{r}}{I_p^{(n)}},$$

$$\bar{r} = \frac{(1 + nr) \cdot I_p^{(n)} - 1}{n}. \quad (1.3.9)$$

Пусть задана номинальная процентная ставка  $r$ , т.е. объявлена норма доходности. Тогда для определения реальной процентной ставки  $r_{real}$  (доходности с учетом инфляции при начислении простых процентов) воспользуемся равенством:

$$1 + nr_{real} = \frac{1 + nr}{I_p^{(n)}},$$

$$r_{real} = \frac{1}{n} \left( \frac{1 + nr}{I_p^{(n)}} - 1 \right) = \frac{r - r^*}{I_p^{(n)}}. \quad (1.3.10)$$

### ✍ Пример 1.3.3

Если номинальная годовая процентная ставка равна 30%, годовой индекс инфляции  $I_p = 1,2$ , то реальная процентная ставка будет равна:

$$r_{real} = \frac{1}{1} \left( \frac{1 + 1 \cdot 0,3}{1,2} - 1 \right) = 8,33\%.$$

В соответствии с формулой (1.3.8),  $r^* = \frac{1,2 - 1}{1} = 0,2$  положительной процентной ставкой является любая ставка, превышающая 20% годовых.

Брутто-ставка превышает 30 % и для обеспечения доходности 30% годовых при наращении простыми процентами должна равняться (по формуле 1.3.9):

$$\bar{r} = \frac{(1 + 1 \cdot 0,3) \cdot 1,2 - 1}{1} = 0,56.$$

Нарощенная сумма по сложным процентам с учетом инфляционного обесценивания находится так:

$$\bar{FV} = \frac{FV}{I_p^{(n)}} = \frac{PV(1 + n \cdot r)^n}{I_p^{(n)}}. \quad (1.3.11)$$

#### Пример 1.3.4

На вклад 28 тыс. руб. ежеквартально начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 40%. Оцените сумму вклада через 21 месяц с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции 2% в месяц. Какова должна быть величина номинальной положительной процентной ставки? Как изменится ситуация, если темп инфляции будет 3,5% в месяц?

*Решение.* За  $n = 1,75$  года (21 месяц) сумма вклада составит:

$$FV_{1,75} = 28 \cdot \left( 1 + \frac{0,4}{4} \right)^{4 \cdot 1,75} = 54,564 \text{ тыс. руб.}$$

Индекс инфляции за 1,75 года при темпе инфляции 2% в месяц находим по формуле (1.3.6):

$$I_p^{(1,75)} = (1 + 0,02)^{21} = 1,5157.$$

Применяя формулу (1.3.8), находим величину вклада с точки зрения ее покупательной способности:

$$\bar{FV}_{1,75} = \frac{FV_{1,75}}{I_p^{(1,75)}} = \frac{54,564}{1,5157} = 35,999 \text{ тыс. руб.}$$

Вычитая из этой величины первоначальную сумму вклада, найдем реальный доход владельца вклада:

$$\bar{FV}_{1,75} - PV = 35,999 - 28 = 7,999 \text{ тыс. руб.}$$

Положительная процентная ставка  $r^{(4)}$  должна удовлетворять неравенству:

$$r^{(4)} > 4 \cdot (\sqrt[4]{1,5157} - 1) = 0,2448.$$

Таким образом, при темпе инфляции 2% в месяц и ежеквартальном начислении сложных процентов реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 24,48%. А поскольку номинальная процентная ставка удовлетворяет этому условию, то владелец вклада, несмотря на инфляцию, получает реальный доход.

Естественно, к такому же ответу можно было прийти, используя условие: относительный рост вклада за квартал должен превышать темп инфляции за это время, т.е. должно выполняться неравенство:

$$\frac{r^{(4)}}{4} > (1 + 0,02)^3 - 1,$$

решая которое находим  $r^{(4)} > 0,2448$ .

При темпе инфляции 3,5% в месяц:  $I_p^{(1,75)} = (1 + 0,035)^{21} = 2,0594$ ,  $\bar{FV}_{1,75} = \frac{54,564}{2,0594} = 26,495 \text{ тыс. руб.}$  реальный доход вкладчика составит  $26,495 - 28 = -1,505 \text{ тыс. руб.}$ , т.е. в этом случае вкладчик с точки зрения покупательной способности потерпит убытки. В данных условиях для положительной процентной ставки должно выполняться неравенство  $r^{(4)} > 4 \cdot (\sqrt[4]{2,0594} - 1) = 0,4349$ , т.е.  $r^{(4)} > 43,49\%$ . Следовательно, номинальная процентная ставка (40%) меньше положительной процентной ставки.

### Начисление процентов в условиях налогообложения

Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. В современной рыночной экономике применяется сложная и разнообразная система налогов, обеспечивающая подавляющую часть государственных доходов. Налоги оказывают существенное влияние на принятие инвестиционных решений: предпочтительность того или иного инвестиционного решения определяется возможными размерами налоговых выплат. Физическое лицо выплачивает налог со своего совокупного дохода, в который входят прибыли из любого источника, в том числе прибыль от размещения капитала. В ряде стран облагают налогом и проценты, получаемые при помещении некоторой денежной суммы в рост.

Формула наращения простыми процентами с учетом уплаты налога:

$$FV_q = PV \cdot [1 + n \cdot r(1 - q)], \quad (1.3.12)$$

где  $q$  — ставка налога на проценты.

При прогрессивном подоходном налоге с ростом дохода его доля, изымаемая в госбюджет в форме налога, увеличивается. Такое положение обеспечивается путем разбиения суммы дохода на несколько частей, к каждой из которых применяется своя ставка налога, называемая предельной.

Средняя ставка налога показывает величину уплаченного налога в процентах от совокупного подлежащего налогообложению дохода.

#### Пример 1.3.5

Для участия в некотором проекте предпринимателю понадобится 28 тыс. руб. Между тем он располагает лишь 25 тыс. руб. С целью накопления требуемой суммы предприниматель собирается положить в банк 25 тыс. руб. Предлагаемая банком процентная ставка равна 40% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, используя в расчетах точные проценты и точное число дней, а

ставка налога на проценты равна 12%? Год невисокосный. Какое будет количество дней, если налог на проценты не надо уплачивать?

*Решение.* Обозначим через  $t$  необходимое число дней, тогда, полагая в формуле (1.3.12)  $PV = 25$  тыс. руб.,  $FV = 28$  тыс. руб.,  $n = t/365$  года,  $r = 0,4$ ,  $q = Q/i$  2, получим уравнение относительно переменной  $t$ :

$$28 = 25 \cdot \left[ 1 + \frac{t}{365} \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,12) \right].$$

Решая это линейное уравнение, находим:  $t = 124,43$  дня. Таким образом, 125 дней будет вполне достаточно для достижения требуемой суммы.

Если бы не было налога на проценты, то, либо решая уравнение  $28 = 25 \cdot \left( 1 + \frac{t}{365} \cdot 0,4 \right)$ , получающееся из формулы (1.2.3), либо пользуясь непосредственно формулой (1.3.12), получим:

$$t = \frac{28 - 25}{25 \cdot 0,4} \cdot 365 = 109,5 \text{ дня.}$$

Следовательно, необходимость уплаты налога на проценты увеличивает искомый срок на 15 дней.

Вообще, как видно из формулы (1.3.12), налог на проценты по существу уменьшает ставку наращения: начисление процентов фактически происходит не по ставке 0,4, а по ставке  $0,4 \cdot (1 - 0,12) = 0,352$ , т.е. по процентной ставке 35,2% годовых, которая меньше 40%.

Заметим, что, обозначая  $n = \frac{t}{T}$  и разрешая формулу (1.3.12) относительно  $t$ , получим формулу:

$$t = \frac{F - P}{P \cdot r(1 - q)} \cdot T,$$

которой можно воспользоваться при ответе на первый вопрос примера.

### Пример 1.3.6

Клиент положил в банк 60 тыс. руб. под простую процентную ставку 40% годовых и через полгода с учетом уплаты налога на проценты получил 70,2 тыс. руб. Определите ставку налога на проценты.

**Решение.** Пусть  $FV_q = 70,2$  тыс. руб.,  $PV = 60$  тыс. руб.,  $n = 0,5$  года,  $r = 0,4$ . Разрешая формулу (1.3.12) относительно  $q$ , получим:

$$q = 1 - \frac{1}{nr} \left( \frac{FV_q}{PV} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{0,5 \cdot 0,4} \left( \frac{70,2}{60} - 1 \right) = 0,15,$$

что эквивалентно  $q = 15\%$ .

## 1.4. Расчеты по простым процентным ставкам с использованием табличного процессора Microsoft Excel

Функции Microsoft Excel используют базовые модели финансовых операций, базирующиеся на математическом аппарате методов финансово-экономических расчетов. Использование возможностей компьютера и табличного процессора Microsoft Excel позволяет экономисту, менеджеру, бухгалтеру, финансисту, специалисту по ценным бумагам и т.п. облегчить выполнение расчетов и представить их в удобной для пользователя форме.

Финансовые функции табличного процессора Microsoft Excel являются, по сути, небольшими подпрограммами решения определенных финансово-экономических задач. Среди финансовых функций можно выделить несколько групп функций, связанных с инвестициями, управлением денежными потоками, расчетом амортизации, операциями с ценными бумагами и др.

Выполнив команду «Вставка/Функция» в Microsoft Excel (или используя кнопку «Мастер функций»), вы открываете диалоговое окно «Мастер функций» (рис. 1.4.1). Данное окно организовано по тематическому принципу. Выбрав в левом списке тематическую группу «Финансовые», вы получите полный перечень списка имен функций, содержащихся в данной группе.

Когда курсор стоит на имени функции, в нижней части окна приводится краткая характеристика функции и ее синтаксис. Вызов функции осуществляется двойным щелчком на ее имени или нажатием кнопки «ОК» в диалоговом окне «Мастер функций» (рис. 1.4.2). Диалоговое окно «Аргументы функции» для каждой финансовой функции регламентировано по составу и формату значений перечня аргументов.

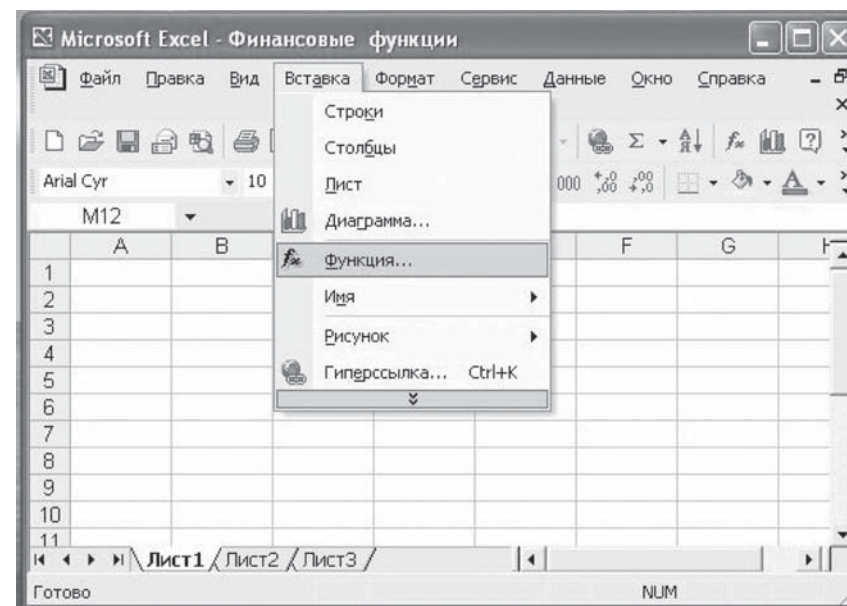


Рис. 1.4.1. Вставка функции

При работе с финансовыми функциями необходимо учитывать специфику задания значения аргументов:

- можно вводить как сами значения аргументов, так и ссылки на адреса ячеек;
- все расходы денежных средств (платежи) представляются отрицательными числами, а все поступления денежных средств — положительными числами;
- процентная ставка вводится с использованием знака %;
- все даты как аргументы функций имеют числовой формат.

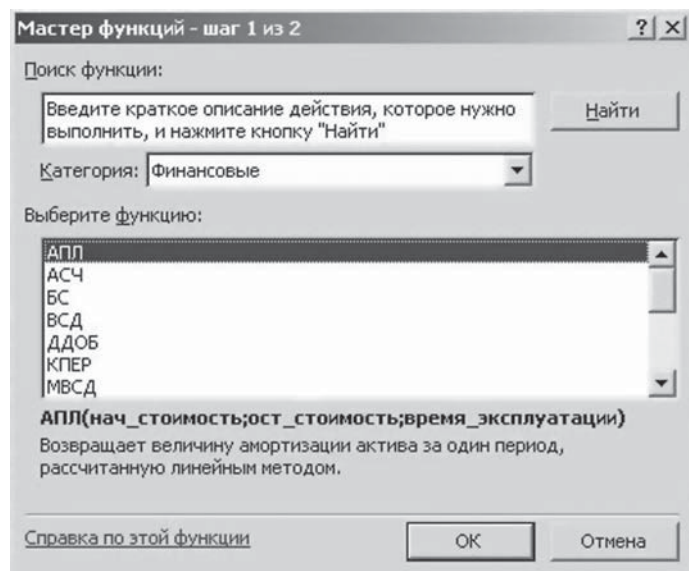


Рис. 1.4.2. Диалоговое окно «Мастер функций»

### Аргументы финансовых функций

Финансовые функции электронных таблиц Excel для расчета операций по вкладам (займам) и кредитам имеют одинаковый набор аргументов (параметров):

**Ставка ( $r$ )** — процентная ставка за период, норма доходности. Например, если получена ссуда на автомобиль под 10% годовых и делаются ежемесячные выплаты, то процентная ставка за месяц составит 10%/12, или 0,83%. В качестве значения аргумента *ставка* нужно ввести в формулу 10%/12, или 0,83%, или 0,0083.

**Кпер ( $n$ )** — число периодов проведения финансовой операции, срок накопления или ссуды. Например, если получена ссуда на 4 года под автомобиль и делаются ежемесячные платежи, то ссуда имеет 4 · 12 (или 48) периодов. В качестве значения аргумента *кпер* в формулу нужно ввести число 48.

**Пс ( $PV$ )** — это приведенная к текущему моменту (нынешняя) стоимость или общая сумма, которая на текущий момент равно-

ценна ряду будущих платежей. Для займа *Пс* — это сумма займа.

**Бс ( $FV$ )** — требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты, т.е. стоимость, достигаемая в конце срока проведения операции. Если аргумент опущен, он полагается равным 0 (будущая стоимость займа, например, равна 0). Например, если предполагается накопить 50 000 руб. для оплаты специального проекта в течение 18 лет, то 50 000 руб. и есть будущая стоимость. Можно сделать предположение о сохранении заданной процентной ставки и определить, сколько нужно откладывать каждый месяц.

**Плт ( $C$ )** — постоянный периодический платеж (выплата, взнос) — сумма платежа, производимого в каждый период и не изменяющегося в течение всего времени проведения операции. Обычно выплаты включают основные платежи и платежи по процентам, но не включают других сборов или налогов. Например, ежемесячная выплата по четырехгодичному займу в 10 000 руб. под 12% годовых составит 263,33 руб. В качестве значения аргумента *выплата* нужно ввести в формулу число 263,33.

**Период ( $i$ )** — порядковый номер периода выплат (от 1 до  $n$ ).

**Тип ( $type$ )** — тип платежа (число 0 или 1, обозначающее, когда производится выплата — в начале (1) или в конце (0) периода).

Для вычислений, связанных с денежными потоками, в Excel используется общая формула:

$$PV \cdot (1 + r)^n + FV + C \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r \cdot type) = 0. \quad (1.4.1)$$

В случае  $r = 0$  (например, беспроцентной ссуды) применяется формула:

$$PV + FV + C \cdot n = 0. \quad (1.4.2)$$

Формулы (1.4.1) и (1.4.2) используются в следующих финансовых функциях Microsoft Excel:

**БС** (ставка; кпер; плт; *пс*; *тип*) — возвращает будущую стоимость инвестиции на основе периодических постоянных (равных по величине сумм) платежей и постоянной процентной ставки;

**КПЕР** (ставка; плт; пс; *бс; тип*) — возвращает общее количество периодов выплаты для инвестиции на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки;

**ПРОЦПЛАТ** (ставка; период; кпер; пс) — вычисляет проценты, выплачиваемые за определенный инвестиционный период;

**ПС** (ставка; кпер; плт; *бс; тип*) — возвращает приведенную (к текущему моменту) стоимость инвестиции. Приведенная (нынешняя) стоимость представляет собой общую сумму, которая на настоящий момент равноценна ряду будущих выплат. Например, когда вы занимаете деньги, сумма займа является приведенной (нынешней) стоимостью для заимодавца;

**ПЛТ** (ставка; кпер; пс; *бс; тип*) — возвращает сумму периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки и др.

Замечание. В формулах (1.4.1) и (1.4.2) и в соответствующих финансовых функциях значения аргументов PV, FV, C должны быть *положительными* в случае поступления этих денежных средств и *отрицательными*, если эти суммы подлежат уплате.

Рассмотрим примеры использования финансовых функции в расчетах по простым процентам.

Для решения задач **наращения** по простым процентам воспользуемся финансовой функцией **БС** (ставка; кпер; плт; *пс; тип*). Следует помнить, что не все аргументы рассматриваемой функции используются в этом случае. Рабочими аргументами являются: *ставка, кпер, пс*. Остальные аргументы не используются.

#### ✍ Пример 1.4.1

Определить наращенную сумму для вклада в размере 10 тыс. руб., помещенного под простую процентную ставку 16% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через год?

**Решение.** Используем финансовую функцию **БС**:

=БС(16%;1;;-10000)

В нижней части окна Microsoft Excel «Аргументы функции» появится ответ: 11600 (рис. 1.4.3). Таким образом, через год наращенная сумма составит 11600,00 руб.

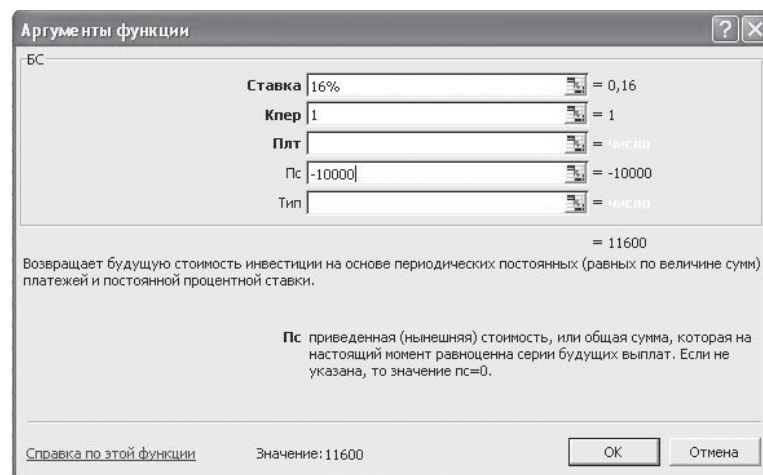


Рис. 1.4.3. Диалоговое окно «Аргументы функции»

Обратите внимание, что эта задача рассматривается с точки зрения вкладчика. Таким образом, аргумент **ПС** имеет отрицательное значение. Регулярные выплаты не производятся, так что аргумент **Плт** равен 0. Без выплат тип аргумента несуществен.

Если продолжительность финансовой операции представлена в днях, то необходимо ввести корректировку в процентную ставку, т.е. аргумент **Ставка** будет представлен как  $t / T \cdot r\%$ .

#### ✍ Пример 1.4.2

Вклад размером в 2000 руб. положен с 06.06 по 17.09 невисокосного года под 30% годовых. Найти величину капитала на 17.09 по различной практике начисления процентов.

**Решение.** Германская практика начисления процентов (360/360):

|        |             |
|--------|-------------|
| Ставка | 101/360·30% |
| Кпер   | 1           |
| Плт    |             |
| Пс     | —2000       |
| Тип    |             |

Значение 2168,33.

Английская практика начисления процентов (365/365):

|        |                      |
|--------|----------------------|
| Ставка | $103/365 \cdot 30\%$ |
| Кпер   | 1                    |
| Плт    |                      |
| Пс     | –2000                |
| Тип    |                      |

Значение 2169,32.

Французская практика начисления процентов (365/360):

|        |                      |
|--------|----------------------|
| Ставка | $103/360 \cdot 30\%$ |
| Кпер   | 1                    |
| Плт    |                      |
| Пс     | –2000                |
| Тип    |                      |

Значение 2171,67.

Таким образом, начисление процентов по германской практике приведет к получению суммы в размере 2168,33 руб., по английской практике – 2169,32 руб., по французской практике – 2171,67 руб.

Для многих финансовых операций необходимо использовать данные о приведенных или современных денежных величинах, как разовой суммы, так и потоков фиксированных периодических платежей. Для облегчения расчетов используется **функция ПС** (ставка; кпер; плт; *бс*; *тип*) – первоначальное значение (*PV*).

Этот расчет является обратным к определению наращенной суммы при помощи функции БС, поэтому сущность используемых аргументов в этих функциях аналогична. Вместе с тем вводится новый аргумент БС – будущая стоимость или будущее значение денежной суммы (*FV*).

Рассмотрим функцию БС для расчета по простым процентам.

*Пример 1.4.3*

Через 125 дней следует накопить сумму в размере 2,5 тыс. руб. Какой должен быть размер вклада, размещаемый под 5%?

*Решение.*

Определяем первоначальную сумму долга:

|        |                     |
|--------|---------------------|
| Ставка | $125/360 \cdot 5\%$ |
| Кпер   | 1                   |
| Плт    |                     |
| Пс     | –2500               |
| Тип    |                     |

Значение –2457,34.

На указанных условиях следует положить 2457,34 руб., что позволит через 125 дней получить 2500,00 руб.

## 1.5. Сложные проценты

Сложные проценты широко применяются в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года. Вместе с тем они могут использоваться и в краткосрочных финансовых операциях, если это предусмотрено условиями сделки либо вызвано объективной необходимостью (например, высоким уровнем инфляции, риска и т.д.). При этом база для исчисления процентов за период включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов.

### *Наращение сложными процентами*

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т.е. базовая сумма, с которой происходит начисление, постоянно растет.

### Пример 1.5.1

Сумма в 10 000 помещена в банк на депозит сроком на 4 года. Ставка по депозиту 10% годовых. Проценты по депозиту начисляются по сложной процентной ставке раз в год. Какова будет величина депозита в конце срока?

**Решение.** По условиям данной операции известными величинами являются: первоначальная сумма вклада  $PV = 10000$ , процентная ставка  $r = 10\%$  и срок  $n = 4$  года.

Определим будущую величину вклада на конец первого периода:

$$FV_1 = PV + PV \cdot r = PV(1 + r) = 10000(1 + 0,1) = 11000.$$

Соответственно для второго периода величина  $FV$  будет равна:

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 \cdot r = PV(1 + r) + PV(1 + r) \cdot r = PV(1 + r) \cdot 2 = 10000(1 + 0,1)^2 = 12100.$$

Для последнего периода ( $n = 4$ ):

$$FV_4 = FV_3 + FV_3 \cdot r = PV \cdot (1 + r) \cdot 4 = 10000 \cdot (1 + 0,1) \cdot 4 = 14641.$$

Таким образом, общее соотношение для определения будущей величины по схеме начисления сложных процентов имеет следующий вид:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n. \quad (1.5.1)$$

Сложные проценты, начисляемые за количество периодов  $n$  в целом, таковы:

$$R = FV - PV = PV \cdot ((1 + r)^n - 1).$$

Величину  $(1 + r)^n = FM1(r, n)$  называют **множителем наращивания** по сложным процентам. Значения этих множителей для целых  $n$  приводятся в таблицах сложных процентов, публикуемых в учебниках по финансовой математике.

Рост по сложным процентам представляет собой геометрическую прогрессию. На рис. 1.5.1 приведен график, отражающий рост суммы в 1,00 при различных ставках сложных процентов.

Нетрудно заметить, что величина  $FV$  существенно зависит от значений  $r$  и  $n$ . Например, будущая величина суммы всего в 1,00 при годовой ставке 15% через 100 лет составит 1174313,45!

В качестве иллюстрации во многих учебниках по финансовой математике приводится следующий пример. Остров Манхэттен, на котором расположена центральная часть Нью-Йорка, был куплен (а точнее выменян) в 1624 г. за 24 доллара. Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась примерно в 40 млрд долларов. Однако несложный расчет показывает, что такой огромный рост достигается при сложной ставке всего 6,3% годовых.

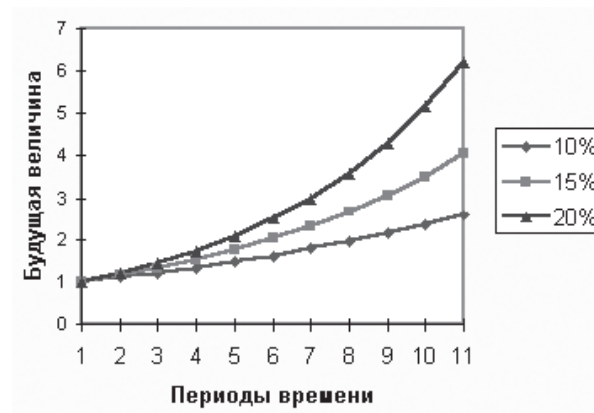


Рис. 1.5.1. Рост суммы по различным ставкам сложных процентов

Графическая иллюстрация соотношения наращенной суммы по простым и сложным процентам представлена на рис. 1.5.2. Как видно из рисунка, при краткосрочных финансовых операциях (до года) начисление по простым процентам предпочтительнее, чем по сложным процентам. При сроке в один год разница отсутствует, но при сроках больше одного года наращенная сумма, рассчитанная по сложным процентам, значительно выше, чем по простым.

То есть при любом  $r$ ,

- если  $0 < n < 1$ , то  $(1 + nr) > (1 + r)^n$ ;
- если  $n > 1$ , то  $(1 + nr) < (1 + r)^n$ ;
- если  $n = 1$ , то  $(1 + nr) = (1 + r)^n$ .

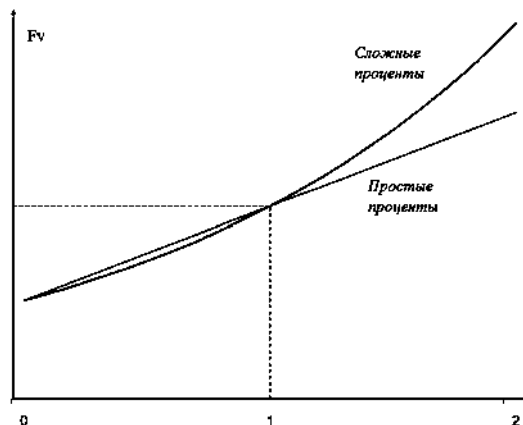


Рис. 1.5.2. Соотношение наращенной суммы по простым и сложным процентам

Таким образом, для лиц, предоставляющих кредит:

- более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее года (проценты начисляются однократно в конце года);
- более выгодной является схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год;
- обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году — по полугодиям, кварталам и т.д. На практике в контракте обычно фиксируется ставка не за период начисления, а годовая ставка ( $r$ ), одновременно указывается период начисления процентов ( $m$ ). Тогда каждый раз проценты начисляются по ставке  $r/m$ . Ставку  $r$  называют **номинальной**.

В этом случае формула сложных процентов (1.5.1) преобразуется к виду:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}, \quad (1.5.2)$$

где  $r$  — годовая процентная ставка;

$m$  — число периодов начисления в году;

$n$  — количество лет.

Очевидно, что чем больше  $m$ , тем быстрее идет наращение суммы. Допустим, что в примере 1.5.1 проценты выплачиваются ежеквартально ( $m = 4$ ).

Определим  $FV_{4,4}$ :

$$FV_{4,4} = 10000,00 (1 + 0,10/4)^{16} = 14845,06.$$

Полученное значение на 204,06 больше, чем при начислении процентов раз в год.

#### ✍ Пример 1.5.2

В банк вложены деньги в сумме 10 000 руб. сроком на 3 года под 6% годовых. Определить сумму к концу срока в зависимости от периода начисления — год, полгода, квартал, месяц.

**Решение.** В зависимости от периода начисления (год, полгода, квартал, месяц) сумма к концу срока составит соответственно:

$$FV = 10000 \cdot (1 + 0,06)^3 = 11910,16 \text{ руб.},$$

$$FV = 10000 \cdot (1 + 0,06/2)^6 = 14185,19 \text{ руб.},$$

$$FV = 10000 \cdot (1 + 0,06/4)^{12} = 20121,96 \text{ руб.},$$

$$FV = 10000 \cdot (1 + 0,06/12)^{36} = 81472,52 \text{ руб.}$$

В рассмотренных нами примерах при начислении процентов не принималось во внимание расположение срока начисления процентов относительно календарных периодов. Вместе с тем часто даты начала и окончания ссуды находятся в двух календарных периодах. Ясно, что начисленные за весь срок проценты не могут быть отнесены к последнему периоду. Таким образом, в бухгалтерском учете при налогообложении в анализе финансовой деятельности предприятия возникает задача распределения начисленных процентов по периодам.

Рассмотрим вопрос начисления процентов в **смежных календарных периодах**. Алгоритм деления общей массы процентов легко сформулировать на основе графика, построенного для двух смежных календарных периодов (рис. 1.5.3). В этом случае общий срок ссуды делится на два периода  $n_1$  и  $n_2$  соответственно:

$R = R1 + R2$ , где  $R1 = FV - PV = PV((1 + R)^{n1} - 1)$ ;  
 $R2 = PV((1 + R)^n - 1) - PV((1 + R)^{n1} - 1) = PV((1 + R)^n - (1 + R)^{n1})$ .

### Пример 1.5.3

Ссуда была выдана с 1 мая 2006 г. по 1 мая 2007 г. Размер ссуды 10 млн руб. Необходимо распределить начисленные проценты (ставка 14% АСТ/АСТ) по календарным годам.

**Решение.** Получим следующие суммы процентов (в тыс. руб.): за период с 1 мая до конца года (244 дня):

$$10000 \cdot (1,14^{\frac{244}{365}} - 1) = 915,42132;$$

за 2005 год:

$$10000 \cdot 1,14^{\frac{244}{365}} \cdot 0,14 = 1528,15898;$$

с 1.01 до 20.05 (121 день)

$$10000 \cdot 1,14^{\frac{244}{365}} \cdot (1,14^{\frac{121}{365}} - 1) = 552,41970.$$

Итого за весь срок 2996 тыс. руб. Такой же результат получим для всего срока в целом:

$$10000 \cdot (1,14^2 - 1) = 2996,00000.$$

Формула (1.5.1) предполагает постоянную ставку на протяжении всего срока начисления процентов. Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему, например, с помощью применения **плавающих ставок**.

В этом случае общий множитель наращивания определяется как произведение частных:

$$PV = FV (1 + r_1)^{n_1} FV (1 + r_2)^{n_2} \dots FV (1 + r_k)^{n_k},$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_k$  — последовательность значений ставок;  
 $n_1, n_2, \dots, n_k$  — периоды, в течение которых «работают» соответствующие ставки.

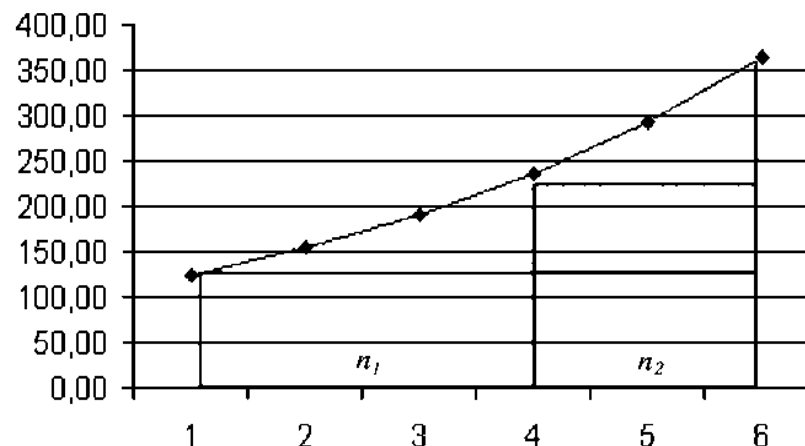


Рис. 1.5.3. График начисления процентов в двух смежных периодах

### Пример 1.5.4

Срок ссуды 5 лет, договорная базовая процентная ставка 12% годовых плюс маржа\* 0,5% в первые два года и 0,75% в оставшиеся годы. Найдите множитель наращивания.

**Решение.** Множитель наращивания в этом случае составит:

$$Q = (1 + 0,125)^2 \cdot (1 + 0,1275)^3 = 1,81407.$$

### Начисление процентов при дробном числе периодов начисления

Часто срок в годах для начисления процентов не является целым числом. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций проценты начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается. В большинстве же случаев учитывается полный срок.

\* Маржа — величина, выражающая разницу между двумя определенными показателями. В банке — разница между процентными ставками по кредитам и вкладам. Разница между рыночной стоимостью ценных бумаг и полученной под них ссудой. В маркетинге — торговая наценка, устанавливаемая промышленными предприятиями. На бирже — сумма денег, выплачиваемая расчетной палате брокером или брокеру клиентами для покрытия неблагоприятных колебаний в стоимости фьючерсного контракта после его регистрации. Иногда употребляется в том же значении, что и депозит (см. финансовый словарь <http://www.m3m.ru/dictionary>).

При этом применяются два метода. Согласно первому расчет ведется непосредственно по формуле (1.5.1). Второй метод предполагает начисление процентов на целое число лет по формуле сложных процентов, а за дробную часть по формуле простых процентов:

$$FV = PV \cdot (1+r)^a (1+b \cdot r), \quad (1.5.3)$$

где  $n = a + b$  — срок ссуды,  
 $a$  — целое число лет,  
 $b$  — дробная часть года

#### Пример 1.5.5

Кредит 3 млн руб. выдан на 3 года и 160 дней под 16,5% сложных годовых. Подсчитайте сумму долга, используя общий и смешанный методы.

*Решение.* Сумму долга на конец срока  $n$ , где

$$n = 3 \frac{160}{365} = 3,4383561,$$

определим по общему методу по формуле (1.5.1):

$$FV = PV \cdot (1+r)^n = 3000000 \cdot (1+0,165)^{3,4383561} = 5071931,85.$$

По смешанному методу по формуле (1.5.3):

$$\begin{aligned} FV &= PV \cdot (1+r)^a \cdot (1+b \cdot r) = 3000000 \cdot (1+0,165)^3 \cdot \left(1 + \frac{160}{365}\right) = \\ &= 5086592,98. \end{aligned}$$

#### Формулы удвоения

Наиболее наглядно влияние вида ставки можно охарактеризовать, сопоставляя число лет, необходимых для удвоения первоначальной суммы. На основе формул наращения по простым и сложным процентам получим следующие формулы удвоения.

Удвоение по простым процентам:

$$n = \frac{1}{r}. \quad (1.5.4)$$

Удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{1}{1} \frac{(2)}{(1+r)} \approx \frac{0,69315}{1} \frac{1}{(1+r)}. \quad (1.5.5)$$

#### Пример 1.5.5

Найдем сроки удвоения для  $r = 22,5\%$ :

$$n = \frac{1}{0,225} = 4,44; \quad n = \frac{0,69315}{\ln(1+0,225)} = 3,04.$$

#### Эффективная ставка

Часто возникает необходимость сравнения условий финансовых операций, предусматривающих различные периоды начисления процентов. В этом случае осуществляют приведение соответствующих процентных ставок к их годовому эквиваленту. Полученную при этом величину называют **эффективной процентной ставкой** (effective percentage rate — EPR) или ставкой сравнения:

$$\begin{aligned} (1+r)^n &= \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} \\ EPR &= \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

где  $r$  — номинальная ставка;

$m$  — число периодов начисления в году.

#### Пример 1.5.6

Осуществим расчет эффективной процентной ставки и будущей величины вклада 10000,00, положенного на депозит сроком на 4 года под 10% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

*Решение.*

$$\begin{aligned} EPR &= (1 + 0,1/4)^4 - 1 = 0,103813; \\ FV &= 10000 \cdot (1 + 0,103813)^4 = 14845,06. \end{aligned}$$

Таким образом, условия помещения суммы в 10000,00 на депозит сроком на 4 года под 10% годовых при ежеквартальном начислении процентов и под 10,3813%, начисляемых раз в год, являются эквивалентными.

#### Пример 1.5.7

Предприниматель может получить ссуду: а) на условиях ежемесячного начисления сложных процентов из расчета 32% годово-

вых; б) на условиях ежеквартального начисления сложных процентов из расчета 34% годовых. Какой вариант более предпочтителен для предпринимателя?

**Решение.** Относительные расходы предпринимателя по обслуживанию ссуды могут быть определены с помощью расчета по формуле (1.5.6) эффективной годовой процентной ставки — чем она выше, тем выше уровень расходов.

а) Полагая для этого варианта  $m = 12$ ,  $r^{(m)} = 0,32$ , получим:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,32}{12}\right)^{12} - 1 = 0,3714.$$

б) Поскольку здесь  $m = 4$ ,  $r^{(m)} = 0,34$ , то:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,34}{4}\right)^4 - 1 = 0,3859.$$

Таким образом, первый вариант является более предпочтительным для предпринимателя. Необходимо отметить, что принятие решения не зависит от величины кредита, поскольку критерием является относительный показатель — эффективная ставка, а она, как следует из формулы (1.5.6), зависит лишь от номинальной ставки и количества начислений.

#### **Дисконтирование по сложной процентной ставке**

Оценивая целесообразность финансовых вложений в тот или иной вид бизнеса, исходя из того, является ли это вложение более прибыльным (при допустимом уровне риска), чем вложения в государственные ценные бумаги, или нет. Используя несложные методы, пытаются проанализировать будущие доходы при минимальном, «безопасном» уровне доходности.

Основная идея этих методов заключается в оценке будущих поступлений  $FV$  (например, в виде прибыли, процентов, дивидендов) с позиции текущего момента. При этом, сделав финансовые вложения, инвестор обычно руководствуется тремя посылами: 1) происходит перманентное обесценение денег (инфляция); 2) темп изменения цен на сырье, материалы и основные средства, используемые предприятием, может существенно отличаться от темпа инфляции; 3) желательно периоди-

ческое начисление (или поступление) дохода, причем в размере не ниже определенного минимума. Базируясь на этих посылах, инвестор должен оценить, какими будут его доходы в будущем, какую максимально возможную сумму допустимо вложить в данное дело исходя из прогнозируемой его рентабельности.

Базовая расчетная формула для такого анализа является следствием формулы (1.5.7):

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = FV \cdot FM2(r, n), \quad (1.5.7)$$

где  $FV$  — доход, планируемый к получению через  $n$  лет;

$PV$  — текущая (встречающиеся синонимы: приведенная, современная, сегодняшняя) стоимость, т.е. оценка величины  $FV$  с позиции текущего момента;

$r$  — процентная ставка.

Экономический смысл такого представления заключается в следующем: прогнозируемая величина денежных поступлений через  $n$  лет ( $FVn$ ) с позиции текущего момента будет меньше и равна  $PV$  (поскольку знаменатель дроби больше единицы). Это означает также, что для инвестора сумма  $PV$  в данный момент времени и сумма  $FV$  через  $n$  лет одинаковы по своей ценности.

Аналогично случаю простых процентов процесс нахождения  $PV$  по  $FV$  по формуле (1.5.6) называется **математическим дисконтированием**.

На рис. 1.5.4 приведена графическая диаграмма, отражающая процесс дисконтирования суммы в 1,00 при различных ставках сложных процентов.

Как и следовало ожидать, величина  $PV$  также зависит от продолжительности операции и процентной ставки, однако зависимость здесь обратная — чем больше  $r$  и  $n$ , тем меньше текущая (современная) величина. Решается задача нахождения такой величины капитала  $PV$ , которая через  $n$  лет при наращении по сложным процентам по ставке  $r$  будет равна  $FV$ .

Как и ранее, разность  $D$  между  $FV$  и  $PV$  называется дисконтом:

$$D = FV - PV = FV - \frac{FV}{(1+r)^n} = FV \cdot (1 - (1+r)^{-n}). \quad (1.5.8)$$

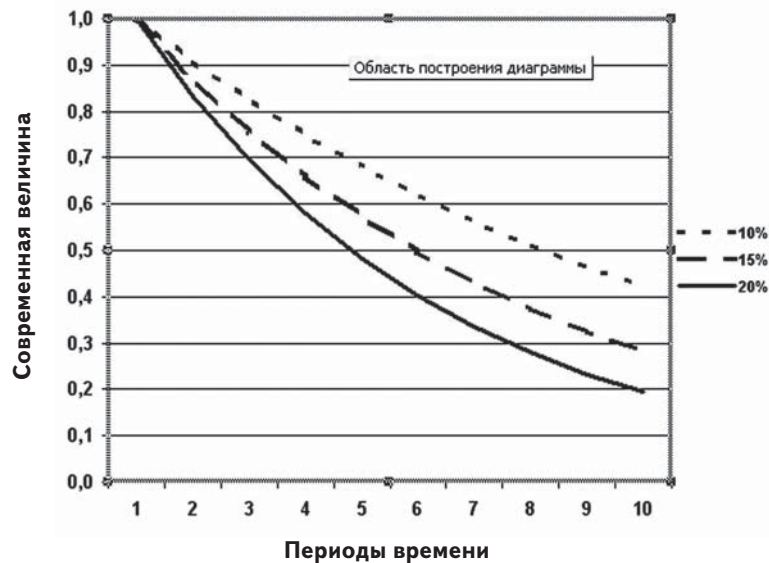


Рис. 1.5.4. Дисконтирование суммы в 1,00 при различных ставках  $r$

Множитель  $FV2(r, n) = \frac{1}{(1+r)^n} = v^n$  называется множителем

дисконтирования, или дисконтным множителем (discount factor). Экономический смысл дисконтного множителя  $FM2(r, n)$  заключается в следующем: он показывает «сегодняшнюю» цену одной денежной единицы будущего, т.е. чему с позиции текущего момента равна одна денежная единица (например, один рубль), циркулирующая в сфере бизнеса  $n$  периодов спустя от момента расчета, при заданной процентной ставке (доходности)  $r$ .

#### Пример 1.5.8

Из какого капитала можно получить 45 тыс. руб. через 6 лет наращением сложными процентами по процентной ставке 6%, если наращение осуществлять: а) ежегодно; б) ежеквартально?

Решение. Полагаем  $n = 6$ ,  $FV = 45$  тыс. руб.

а) При ежегодном наращении пользуемся формулой (1.5.6) при  $r = 0,06$ :

$$PV = \frac{45}{(1+0,06)^6} = 31,72322 \text{ тыс. руб.}$$

б) При ежеквартальном наращении при  $m = 4$  и  $r^{(m)} = 0,36$ :

$$PV = \frac{45}{\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4 \cdot 6}} = 31,49948 \text{ тыс. руб.}$$

Если использовать обозначение множителя дисконтирования  $FM2(r, n)$ , то формулу (1.5.7) можно записать в виде:

$$PV = FV \cdot FM2\left(\frac{r^{(m)}}{m}, mn\right).$$

Поэтому в ряде случаев значение множителя  $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$  можно найти по таблицам значений множителя  $FM2(r, n)$ , полагая в качестве  $r$  и  $n$  соответственно  $\frac{r^{(m)}}{m}$  и  $mn$  (конечно, если таблица достаточно подробна и позволяет сделать это). В частности, для случая б) имеем  $\frac{r^{(4)}}{4} = \frac{36\%}{4} = 9\%$  и число периодов  $mn = 4 \cdot 6 = 24$ . Воспользовавшись табл. 2 прил. 3, получим:  $P = 45 \cdot 0,1264 = 5,688$  тыс. руб.

#### Сложная учетная ставка

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент (например, за кредит или за продажу некоторого финансового документа до срока его погашения) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой процентной ставке), а каждый раз

на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

Для лица, осуществляющего предварительное (антисипативное) начисление процентов, а следовательно, и дисконтирование, более выгодным является дисконтирование по сложной учетной ставке, если срок учета менее одного года; более выгодным является дисконтирование по простой учетной ставке, если срок учета превышает один год; дисконтирование в обоих случаях дает один и тот же результат, если срок учета равен одному году.

$$PV = FV \cdot (1 - d)^n, \quad (1.5.9)$$

где  $(1 - d)^n$  — дисконтный множитель.

Когда дисконтирование производится не один, а несколько раз в году формула (1.5.8) преобразуется к следующему виду:

$$PV = FV_n \cdot \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn}, \quad (1.5.10)$$

где  $n$  — число лет;

$m$  — количество осуществлений операции дисконтирования в год.

С ростом в году числа операций дисконтирования по номинальной учетной ставке величина учтенного капитала возрастает.

#### ✍ Пример 1.5.9

Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 40 тыс. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке: а) 20% годовых; б) 25% годовых.

**Решение.** а) Полагая  $n = 3$ ,  $FV_3 = 40$  тыс. руб.,  $d = 0,2$ , получим:

$$PV = 40 \cdot (1 - 0,2)^3 = 20,48 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконт составит:

$$D_d = 40 - 20,48 = 19,52 \text{ тыс. руб.}$$

б) Так как в этом случае  $d = 0,25$ , то

$$PV = 40(1 - 0,25)^3 = 16,875 \text{ тыс. руб.}$$

$$D_d = 40 - 16,875 = 23,125 \text{ тыс. руб.}$$

Если срок, за который осуществляется дисконтирование, не равен целому числу лет, то при определении стоимости учтенного капитала, как правило, используют либо сложную учетную ставку (1.5.10), либо смешанную схему (применяется сложная ставка для целого числа лет и простая ставка — для дробной части года).

$$PV = FV_n (1 - d)^w (1 - fd), \quad (1.5.11)$$

где  $w$  — целое число периодов дисконтирования по сложной учетной ставке;

$f$  — дробная часть периода;

$n = w + f$ .

Очевидно, что стоимость учтенного капитала будет больше при использовании смешанной схемы.

#### ✍ Пример 1.5.10

Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определите суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета векселя.

**Решение.** При применении только сложной учетной ставки воспользуемся формулой (1.5.9). Так как дисконтирование производится один раз в год, то  $n = 32/12 = 8/3$ . Далее  $FV = 70$  тыс. руб.,  $d = 0,24$ , поэтому:

$$PV = 70(1 - 0,24)^{\frac{8}{3}} = 33,672 \text{ тыс. руб.}$$

Если же использовать при учете смешанную схему, то при  $w = 2$ ,  $f = 2/3$  по формуле (1.5.10) получим:

$$PV = 70 \cdot (1 - 0,24)^2 (1 - \frac{2}{3} \cdot 0,24) = 33,963 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, предъявитель векселя получит больше при использовании смешанной схемы.

Из формулы (1.5.8) можно вывести формулу для определения срока ссуды (при использовании сложной учетной ставки):

$$n = \frac{\ln \frac{P}{F_n}}{m \ln \left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)}. \quad (1.5.12)$$

Эффективная годовая учетная ставка обеспечивает тот же результат, что и дисконтирование несколько раз в году по номинальной учетной ставке, деленной на число периодов дисконтирования.

Эффективная учетная ставка определяется и как ставка, обеспечивающая переход от исходной суммы к учетной при однократном дисконтировании за базовый период (например, за год), т.е. не используется явным образом номинальная учетная ставка. Формулы определения эффективной годовой процентной ставки имеют вид:

$$d_{ef} = 1 - \left( 1 - \frac{d^m}{m} \right)^m, \quad (1.5.13)$$

$$d_{ef} = 1 - \left( \frac{P}{F_n} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.5.14)$$

#### Эквивалентность ставок

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки, методы наращивания и дисконтирования. Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются. Таким образом, участникам финансового соглашения безразлично, какая ставка будет фигурировать в контракте.

При выводе равенств, связывающих эквивалентные ставки, используется следующая идея: если из первоначального капитала наращиванием за данное время необходимо получить некоторую сумму, то будут эквивалентны все ставки, обеспечивающие один и тот же множитель наращивания. Поэтому, приравнявая к друг другу множители наращивания, получим соотношение между

эквивалентными ставками. Точно так же при переходе от будущей стоимости к приведенной стоимости с помощью дисконтирования приравняются множители дисконтирования.

Разберем простой пример. Определим соотношение эквивалентности по простой и сложной ставкам. Для этого приравняем друг к другу соответствующие множители наращивания:

$$(1 + n \cdot r_1) = (1 + r_2)^n,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  ставки простых и сложных процентов.

Приведенное равенство предполагает, что начальные и наращенные суммы при применении двух видов ставок идентичны (рис. 1.5.5).

Решение приведенного выше равенства дает следующее соотношение:

$$r_1 = \frac{(1 + r_2)^n - 1}{n}, \quad r_2 = \sqrt[n]{1 + n \cdot r_1} - 1. \quad (1.5.15)$$



Рис. 1.5.5.

Аналогичным образом определяются и другие соотношения эквивалентности:

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{n},$$

$$d^{(m)} = m(1 - \sqrt[mn]{1 - nd}),$$

$$r = \frac{\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mn} - 1}{n}, \quad (1.5.16)$$

$$d^{(m)} = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[mn]{1 + nr}}\right),$$

$$d = \frac{1 - \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{n},$$

$$r^{(m)} = m\left(\frac{1}{\sqrt[mn]{1 - nd}} - 1\right), \quad (1.5.17)$$

где  $r, d$  — простые ставки.

#### ✎ Пример 1.5.11

Долговое обязательство учтено в банке за 9 месяцев до срока погашения по номинальной годовой учетной ставке  $d^{(4)} = 32\%$ . По какой простой учетной ставке надо произвести учет этого обязательства, чтобы обеспечить банку тот же самый дисконт?

*Решение.* Полагая в формуле (1.5.16)  $n = 0,75$ , находим:

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{0,32}{4}\right)^{4 \cdot 0,75}}{0,75} = 0,2951.$$

Таким образом, искомое значение простой учетной ставки составляет 29,51% годовых. С целью проверки можно воспользоваться формулой, где  $d = 0,2951$ :

$$d^{(4)} = 4(1 - \sqrt[4]{1 - 0,75 \cdot 0,2951}) = 0,32, \text{ или } 32\%.$$

Получив номинальную годовую учетную ставку, данную в условии примера, делаем вывод, что простая учетная ставка найдена верно.

#### ✎ Пример 1.5.12

Банком выдан кредит на три месяца под 27% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Определите величину простой учетной ставки, обеспечивающей такую же величину начисленных процентов.

*Решение.* По формуле при  $n = 0,25$ ,  $r^{(12)} = 0,27$  находим требуемую величину простой учетной ставки:

$$d = \frac{1 - \left(1 + \frac{0,27}{12}\right)^{-12 \cdot 0,25}}{0,25} = 0,2583, \text{ или } 25,83\%.$$

Для проверки результата воспользуемся формулой (1.5.8):

$$r^{(12)} = 12 \left( \frac{1}{\sqrt[12]{1 - 0,25 \cdot 0,2583}} - 1 \right) = 0,27,$$

т.е. получили исходную сложную процентную ставку.

### Непрерывные проценты

По мере увеличения числа начислений процентов в течение года ( $m$ ) промежуток времени между двумя смежными начислениями уменьшается: при  $m = 1$  этот промежуток равен 1 году, а при  $m = 12$  — только 1 месяцу. Теоретически можно представить ситуацию, когда начисление сложных процентов производится настолько часто, что общее его число в году стремится к бесконечности, тогда величина промежутка между отдельными начислениями будет приближаться к нулю, т.е. начисление станет практически непрерывным. Такая, на первый взгляд, гипотетическая ситуация имеет важное значение для финансов и при по-

строении сложных аналитических моделей (например, при разработке масштабных инвестиционных проектов), где часто применяют **непрерывные проценты**.

Непрерывная процентная ставка (очевидно, что при непрерывном начислении речь может идти только о сложных процентах) обозначается буквой  $\delta$  (читается «дельта»), часто этот показатель называют «сила роста». Формула наращенного по непрерывной процентной ставке имеет вид:

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n}, \quad (1.5.17)$$

где  $e$  — основание натурального логарифма ( $\approx 2,71828...$ ),  
 $e^{\delta \cdot n}$  — множитель наращенных непрерывных процентов.

#### ✍ Пример 1.5.13

Чему будет равна через 3 года сумма 250 тыс. рублей, если сегодня положить ее на банковский депозит под 15% годовых, начисляемых непрерывно?

**Решение.** По формуле непрерывных процентов получаем:

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n} = 250 \cdot e^{0,15 \cdot 3} = 392,07805 \text{ тыс. рублей.}$$

Для непрерывных процентов не существует различий между процентной и учетной ставками — сила роста является универсальным показателем. Однако наряду с постоянной силой роста может использоваться переменная процентная ставка, величина которой меняется по заданному закону (математической функции). В этом случае можно строить очень мощные имитационные модели, однако математический аппарат расчета таких моделей достаточно сложен и не рассматривается в настоящем пособии, так же как и начисление процентов по переменной непрерывной процентной ставке.

Непрерывное дисконтирование с использованием постоянной силы роста выполняется по формуле:

$$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n} = \frac{FV}{e^{\delta \cdot n}}, \quad (1.5.18)$$

где  $1/e^{\delta \cdot n}$  — дисконтный множитель по силе роста.

#### ✍ Пример 1.5.14

В результате осуществления инвестиционного проекта планируется получить через 2 года доход в размере 15 млн рублей. Чему будет равна приведенная стоимость этих денег в сегодняшних условиях, если сила роста составляет 22% годовых?

**Решение.** По формуле дисконтирования по непрерывным процентам получаем:

$$PV = \frac{FV}{e^{\delta \cdot n}} = \frac{15}{e^{0,22 \cdot 2}} = 9,66054632 \text{ млн рублей.}$$

## 1.6. Расчет сложных процентов в электронных таблицах Microsoft Excel

Рассмотрим примеры использования финансовых функций в расчетах по сложным процентам с использованием электронных таблиц Microsoft Excel.

Для решения задач **наращения** по сложным процентам воспользуемся рассмотренной нами ранее финансовой функцией **БС** (ставка; кпер; плт; пс; тип). Следует помнить, что не все аргументы рассматриваемой функции используются во всех случаях.

#### ✍ Пример 1.6.1

Определите наращенную сумму для вклада в размере 10 тыс. руб., помещенного под сложную процентную ставку 16% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 3 года?

**Решение.** Используем финансовую функцию **БС**:  
 $=\text{БС}(16\%; 3;; -10000)$

|        |        |
|--------|--------|
| Ставка | 16%    |
| Кпер   | 1      |
| Плт    |        |
| Пс     | -10000 |
| Тип    |        |

Таким образом, через год наращенная сумма составит 15608,96 руб.

Обратите внимание, что эта задача рассматривается с точки зрения вкладчика. Таким образом, начальный вклад имеет отрицательное значение. Регулярные выплаты не производятся, так что аргумент выплаты равен 0. Без выплат тип аргумента несуществен.

#### Пример 1.6.2

Имеются два варианта инвестирования средств в течение 3 лет: в начале каждого года под 16% годовых или в конце каждого года под 18% годовых. Ежегодно вносится 200 тыс. руб. Определите, сколько денег окажется на счете в конце 3-го года для каждого варианта.

**Решение.** Для расчета суммы на счете для каждого варианта воспользуемся финансовой функцией **БС**(ставка; кпер; плт; *пс*; *тип*).

Для первого варианта:  $=\text{БС}(16\%; 3; -200; ; 1) = 813,29920$  тыс. руб.

Для второго варианта:  $=\text{БС}(18\%; 3; -200) = 714,480$  тыс. руб.

Расчеты показали, что первый вариант предпочтительнее.

Если процентная ставка меняется с течением времени, то для расчета будущего значения инвестиции после начисления сложных процентов можно использовать функцию **БЗРАСПИС**. Ее синтаксис:

**БЗРАСПИС** (первичное; план),

где Первичное — это стоимость инвестиции на текущий момент.

План — это массив применяемых процентных ставок. Значения в аргументе ставки могут быть числами или пустыми ячейками; любые другие значения дают в результате значение ошибки **#ЗНАЧ!** при работе функции **БЗРАСПИС**. Пустые ячейки трактуются как нули (нет дохода).

Функция возвращает будущую стоимость первоначальной основной суммы после применения ряда (плана) ставок сложных процентов. Если данная функция недоступна или возвращает ошибку **#ИМЯ?**, установите и загрузите надстройку «Пакет анализа» (**Сервис/Настройки/Пакет анализа/ОК**).

#### Пример 1.6.3

По облигации номиналом 100 тыс. руб., выпущенной на 5 лет, предусмотрен следующий порядок начисления процентов: в первый год — 10%, в последующие годы на 5% больше. Рассчитайте будущую (наращенную) стоимость облигации по сложной процентной ставке.

**Решение.** Введем в ячейку A1 10%, а в последующие ячейки A2:A5 формулу для нахождения процентных ставок за 2–5 годы. А в ячейку B1 номинал облигации — 100 тыс. руб. Тогда наращенная стоимость облигации вычисляется в ячейке C1 с использованием формулы (рис. 1.6.1):

$=\text{БЗРАСПИС}(B1;A1:A5).$

Будущая стоимость облигации и равна 246,675 тыс. руб.

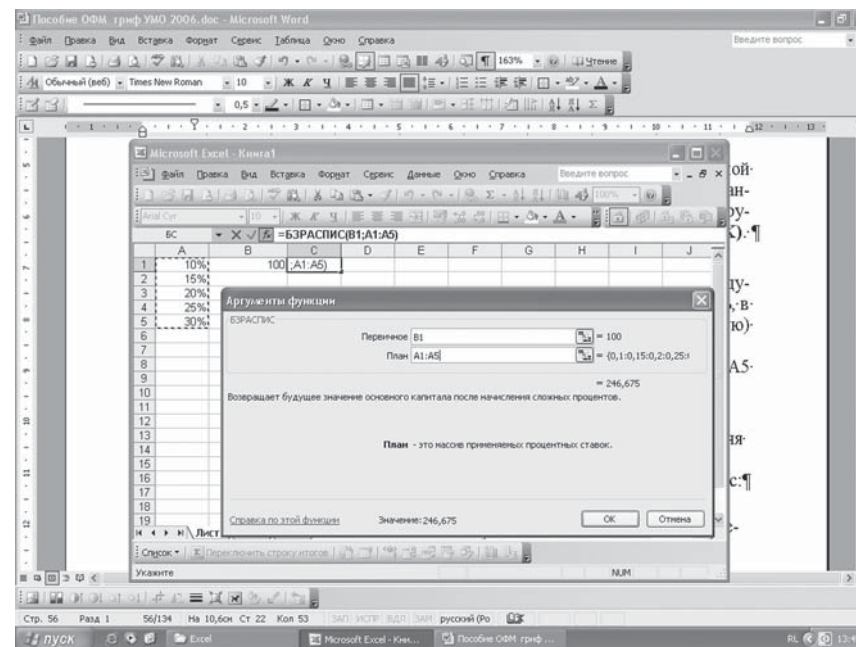


Рис. 1.6.1. Окно аргументов функции **БЗРАСПИС**

#### Пример 1.6.4

Исходя из плана начисления процентов, приведенного в примере 1.6.3., рассчитайте номинал облигации, если известно, что ее будущая стоимость составила 616,68750 тыс. руб.

**Решение.** Для решения задачи необходимо использовать аппарат подбора параметра пакета Microsoft Excel, вызываемый командой меню **Сервис/Подбор параметра**.

Пусть в ячейки A1:A5 введен план начисления процентов. В ячейку C2 запишем формулу =БЗРАСПИС(B1;A1:A5). Так как ячейка B1 пустая, то в C! Окажется нулевое значение. Установим курсор в ячейку C2, выполним команду **Сервис/Подбор параметра** и заполним диалоговое окно, как показано на рис. 1.6.2.

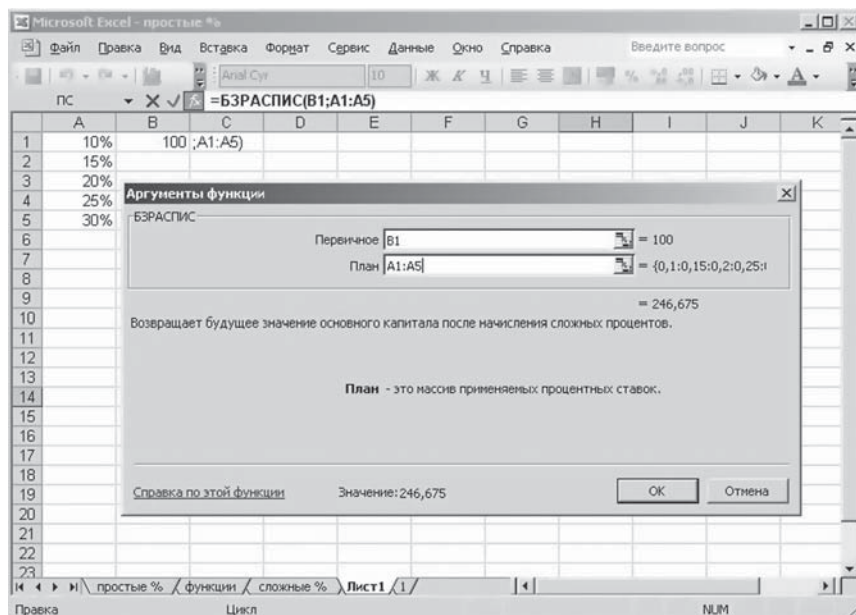


Рис. 1.6.2. Окно «Подбор параметра»

В результате в ячейке B1 появится значение номинала облигации — 250 тыс. руб.

Для расчета текущей стоимости суммы вклада (займа), если известно будущее (наращенное) значение можно воспользоваться финансовой функцией **ПС**. Ее синтаксис:

ПС(ставка; кпер; плт; бс; тип),

где *Ставка* — процентная ставка за период;

*Кпер* — общее число периодов платежей;

*Плт* — выплата, производимая в каждый период и не меняющаяся за все время выплаты ренты, включая другие сборы или налоги;

*Бс* — требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент опущен, он полагается равным 0 (будущая стоимость займа, например, равна 0).

*Тип* — число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата: 0 или опущен — в конце периода; 1 — в начале периода.

#### Пример 1.6.5

У меня на депозитном счету 10 573,45\$, положенные под 1% ежемесячно. Счет открыт 12 месяцев назад. Определите каков был начальный вклад?

**Решение.** Используем финансовую функцию **ПС**.

=ПС(B11;B12;B13;B14;B15)

|   | А      | В        |
|---|--------|----------|
| 1 | ставка | 1%       |
| 2 | кпер   | 12       |
| 3 | плт    | 0        |
| 4 | БС     | 10573,45 |
| 5 | тип    |          |

Ответ: —9383,40 р.

Без регулярных выплат аргумент *выплата* равен 0 и тип аргумента несуществен. Так как 110573,45 уже есть на счету, то аргумент БС получает знак «плюс», а подсчитанное начальное значение отрицательное.

Для определения общего числа периодов выплат, как для единой суммы вклада (займа), так и для периодических постоянных выплат, на основе постоянной сложной процентной ставки используют финансовую функцию **КПЕР**. Ее синтаксис:

**КПЕР**(ставка;плт;ПС;БС;тип),

где *Ставка* — процентная ставка за период.

*Плт* — выплата, производимая в каждый период; это значение не может меняться в течение всего периода выплат. Обычно платеж состоит из основного платежа и платежа по процентам и не включает налогов и сборов.

*Пс* — приведенная к текущему моменту стоимость или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей.

*Бс* — требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент *бс* опущен, то он полагается равным 0 (например, *бзс* для займа равно 0).

*Тип* — число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата: 0 или опущен — в конце периода; 1 — в начале периода.

#### ✍ Пример 1.6.6

У меня на депозитном счету 100 000, вложенные под 14% годовых. Рассчитайте, сколько времени требуется для того, чтобы я стал миллионером?

*Решение.* Используем финансовую функцию **КПЕР**.  
=КПЕР(B1;B2;-B3;B4;B5)

|          | <b>А</b>      | <b>В</b> |
|----------|---------------|----------|
| <b>1</b> | <b>ставка</b> | 14%      |
| <b>2</b> | <b>кпер</b>   | 0        |
| <b>3</b> | <b>плт</b>    | 100000   |
| <b>4</b> | <b>БС</b>     | 1000000  |
| <b>5</b> | <b>тип</b>    | 0        |

Ответ: 17,57

Для определения значения процентной ставки за один расчетный период используют финансовую функцию **СТАВКА**. Ее синтаксис:

**СТАВКА**(кпер;плт;пс;бс;тип;предположение),

где *Кпер* — общее число периодов платежей по аннуитету;

*Плт* — регулярный платеж (один раз в период), величина которого остается постоянной в течение всего срока аннуитета. Обычно *плт* состоит из платежа основной суммы и платежа процентов, но не включает других сборов или налогов. Если аргумент опущен, должно быть указано значение аргумента *бс*;

*Пс* — приведенная к текущему моменту стоимость или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей;

*Бс* — требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент *бс* опущен, то он полагается равным 0 (например, *бзс* для займа равно 0);

*Тип* — число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата: 0 или опущен — в конце периода; 1 — в начале периода;

Предположение (прогноз) — предполагаемая величина ставки, если значение предположения опущено, то оно полагается равным 10%.

#### ✍ Пример 1.6.7

Если вклад 10 000 увеличился до 20 000 за 8 лет, то какой была средняя годовая ставка?

*Решение.* Используем финансовую функцию **СТАВКА**.  
=СТАВКА(8;0;-10000; 20000;0)

|                |        |
|----------------|--------|
| <b>Кпер</b>    | 8      |
| <b>Плт</b>     | 0      |
| <b>Пс</b>      | -10000 |
| <b>Бс</b>      | 20000  |
| <b>Тип</b>     | 0      |
| <b>Прогноз</b> |        |

Таким образом, средняя годовая процентная ставка составит 9,05%.

Сравнение условий финансовых операций, предусматривающих различные периоды начисления процентов, осуществляют приведением соответствующих процентных ставок к их годовому эквиваленту. Полученную при этом величину называют эффективной процентной ставкой и для ее расчета используют функцию ЭФФЕКТ. Обратная задача — расчета номинальной процентной ставки, решается с использованием функции НОМИНАЛ.

Синтаксис функций:

ЭФФЕКТ(номинальная\_ставка; кол-пер);

НОМИНАЛ(эффект\_ставка; кол-пер).

#### ✍ Пример 1.6.8

Номинальная ставка составляет 16%. Рассчитайте эффективную процентную ставку при следующих вариантах начисления процентов:

- а) полугодовом;
- б) квартальном;
- в) ежемесячном.

*Решение.*

- а) ЭФФЕКТ(16%; 2) = 16,64%;
- б) ЭФФЕКТ(16%; 4) = 16,99%;
- в) ЭФФЕКТ(16%; 12) = 17,23%.

#### ✍ Пример 1.6.9

Допустим, эффективная ставка составляет 28%, а начисление процентов производится ежемесячно. Рассчитайте номинальную ставку.

*Решение.* Номинальная годовая процентная ставка будет равна НОМИНАЛ(28%; 12) = 0,2494, или 24,94%.

## 1.7. Начисление сложных процентов в условиях инфляции и налогообложения

Пусть на капитал  $PV$  по истечении  $n$  лет начислены сложные проценты по годовой номинальной ставке  $r^{(m)}$ . Величина наращенной за  $n$  лет суммы находится по формуле

$$FV = PV \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} = PVa^n, \quad (1.7.1)$$

где  $a = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$ .

В этом случае налог начисляется на все полученные проценты один раз за весь срок. Если ставка налога равна  $q$ , то сумма налога составит:

$$Q = (FV - PV) \cdot q = PV(a^n - 1)q, \quad (1.7.2)$$

и следовательно, после уплаты налога наращенная сумма уменьшится и станет равной величине:

$$\hat{FV}_n = FV_n - (FV_n - PV) \cdot q = PV \cdot [a^n(1 - q) + q]. \quad (1.7.3)$$

При начислении процентов по истечении каждого года и налог начисляется за каждый год. Предположим, что налог за каждый год выплачивается не из капитала  $PV$ , на который осуществляется наращение, а из других источников. Поскольку величина начисленных процентов растет, то и величина налога будет увеличиваться.

Налог за первый год составит:

$$Q^{(1)} = (FV_1 - PV) \cdot q = PV \cdot (a - 1) \cdot q;$$

за второй год:

$$Q^{(2)} = (FV_2 - FV_1) \cdot q = PV \cdot a \cdot (a - 1) \cdot q = aQ^{(1)};$$

за третий год:

$$Q^{(3)} = (FV_3 - FV_2) \cdot q = PVa^2 \cdot (a - 1) \cdot q = aQ^{(2)}.$$

За  $k$ -й величину налога можно найти используя рекуррентное равенство:

$$Q^{(k)} = aQ^{(k-1)}. \quad (1.7.4)$$

Очевидно, что  $Q^{(1)} + Q^{(2)} + \dots + Q^{(n)} = (FV_n - PV) \cdot q = Q$ .

Формулами (1.7.1–1.7.4) можно пользоваться и в случае наращенных сложными процентами по учетной ставке и наращенных непрерывными процентами, только подставляя соответствующий коэффициент  $a$ . Если наращение сложными процентами по учетной ставке  $d^{(m)}$  происходит  $m$  раз в год, то  $a = (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{-m}$ .

Если начисляются непрерывные проценты по ставке  $\delta$ , то  $a = e^{-\delta}$ .

Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуды с учетом инфляции составит:

$$\overline{FV}_n = \frac{PV a^n}{I_p^{(n)}}, \quad (1.7.5)$$

где  $I_p^{(n)}$  — индекс инфляции за период  $n$ ;

$a$  — равно либо  $\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$ , либо  $\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}$ , либо  $e^{\delta}$ .

Тогда формула определения номинальной годовой процентной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной номинальной годовой ставке  $r^{(m)}$ :

$$\bar{r}^m = m \left[ 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \sqrt[m]{I_p^{(n)}} - 1 \right]. \quad (1.7.6)$$

Формула определения реальной номинальной годовой процентной ставки при объявленной исходной процентной ставке  $r^{(m)}$  в условиях инфляции:

$$r_{real}^{(m)} = m \left[ 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \frac{1}{\sqrt[m]{I_p^{(n)}}} - 1 \right]. \quad (1.7.7)$$

Формула определения номинальной годовой учетной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной номинальной годовой ставке  $d^{(m)}$ :

$$\bar{d}^m = m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right) \frac{1}{\sqrt[m]{I_p^{(n)}}} \right]. \quad (1.7.8)$$

Формула определения реальной номинальной годовой учетной ставки при объявленной исходной учетной ставке  $d^{(m)}$  в условиях инфляции:

$$d_{real}^{(m)} = m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right) \sqrt[m]{I_p^{(n)}} \right]. \quad (1.7.9)$$

Формула определения силы роста, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной силе роста  $\delta$ :

$$\bar{\delta} = \delta + \frac{1}{n} \ln I_p^{(n)}. \quad (1.7.10)$$

Формула определения реальной силы роста при объявленной исходной силе роста в условиях инфляции:

$$\delta_{real} = \delta - \frac{1}{n} \ln I_p^{(n)}. \quad (1.7.11)$$

Формула Фишера (названная именем американского ученого экономиста Ирвинга Фишера, который ее предложил):

$$\bar{r} = r + h + rh, \quad (1.7.12)$$

где  $h$  — годовой темп инфляции.

Величина  $h + rh$  называется инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. В практических расчетах при малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке пользуются приближенной формулой:  $\bar{r} \approx r + h$ .

#### Пример 1.7.1

На вклад начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежемесячный темп инфляции составляет 3%?

**Решение.** а) Обозначим через  $I_p^{(\frac{1}{12})}$  среднемесячный (т.е. за 1/12 года) индекс инфляции, тогда  $I_p^{(\frac{1}{12})} = 1,03$  и по формуле при  $k = 12$  находим индекс инфляции за год:

$$I_p^{(1)} = I_p^{(\frac{1}{12})} = \left(I_p^{(\frac{1}{12})}\right)^{12} = 1,03^{12} = 1,4258.$$

Пусть  $r$  — процентная ставка при ежегодном начислении сложных процентов, тогда в соответствии с формулой (1.7.6) значение ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, находится из равенства  $1 + r = I_p^{(1)}$  (т.е. множитель наращенения за год приравнивается к годовому индексу инфляции). Таким образом:

$$r = I_p^{(1)} - 1 = 1,4258 - 1 = 0,4258 = 42,58\%.$$

Следовательно, реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 42,58% годовых.

б) При ежеквартальном начислении сложных процентов для определения номинальной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, воспользуемся равенством  $\left(1 + \frac{r^{(4)}}{4}\right)^4 = I_p^{(1)}$ ,

откуда:

$$r^{(4)} = 4\left(\sqrt[4]{I_p^{(1)}} - 1\right) = 4\left(\sqrt[4]{1,4258} - 1\right) = 0,3709 = 37,09\%.$$

Таким образом, положительная процентная ставка при ежеквартальном начислении сложных процентов превышает 37,09% годовых.

в) В случае ежемесячного начисления процентов пользуемся равенством  $\left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12} = I_p^{(1)}$ ,

откуда:

$$r^{(12)} = 12\left(\sqrt[12]{I_p^{(1)}} - 1\right) = 12(1,03 - 1) = 0,36 = 36\%.$$

Итак, в данной ситуации реальное наращение капитала происходит при номинальной процентной ставке большей, чем 36% годовых. В этом случае ответ можно было дать сразу, поскольку для осуществления реального наращения капитала его относительный рост за месяц должен превышать темп инфляции за это же время. Следовательно,  $\frac{r^{(12)}}{12} > 0,03$ , поэтому  $r^{(12)} > 0,36$ .

Заметим, что величину сложной процентной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, можно найти из формулы, при  $r^{(m)} = 0$ :

$$\bar{r}^{(m)} = m[\sqrt[m]{I_p^{(n)}} - 1].$$

Полагая  $n = 1$ , ответы для случаев а), б), в) получим соответственно при  $m = 1, 4, 12$ .

## 1.8. Построение схем (планов) погашения долгосрочных обязательств

Из курса «Финансы и кредит» Вы знаете, что кредит (от лат. *credit* — он верит) — это предоставление кредитором заемщику определенной суммы средств (в денежной или товарной форме) на условиях платности, срочности, возвратности и обеспеченности (в РФ — залог, банковская гарантия, поручительство, страховая ответственность заемщика за погашение кредита).

Кредитные операции делятся на активные (банк или другой хозяйствующий субъект выдает ссуды) и пассивные (банк или другой хозяйствующий субъект берет ссуды). Кредитные операции могут осуществляться в двух формах — в форме ссуд и в форме депозитов.

Банковское кредитование подразделяется на прямое и косвенное. Прямое кредитование — это кредитные отношения хозяйствующих субъектов непосредственно с банком. Косвенное кредитование означает, что кредитные отношения возникают

вначале между хозяйствующими субъектами, которые впоследствии обращаются в банк за кредитами. Основными видами косвенного банковского кредитования выступают операции с векселями, факторинг и лизинг.

Различают следующие основные формы кредита:

- краткосрочный, выдаваемый, как правило, на срок до года, предназначенный преимущественно для формирования оборотных средств предприятий, фирм;
- долгосрочный, предоставляемый на срок свыше года и используемый в основном в качестве инвестиционного капитала;
- гарантированный, предоставляемый под гарантию, под обеспечение;
- государственный, в котором в качестве заемщика выступает государство, а в роли кредитора — физические и юридические лица, приобретающие государственные ценные бумаги (облигации, казначейские сертификаты и др.);
- банковский, предоставляемый банками в денежной форме;
- потребительский, предоставляемый потребителям товаров и услуг и используемый для удовлетворения потребительских нужд.

### ***Кредитные процентные ставки***

Цена кредита — ставка банковского процента. В зависимости от кредитной политики банка сумма процентного платежа может рассчитываться от первоначальной основной суммы кредита или от текущего остатка основной суммы кредита. Первый метод определения банковского вознаграждения уже практически никем не используется, поскольку данный расчет дает конечную сумму процентных выплат почти в 2 раза больше, чем метод вычисления от остаточной суммы.

Ставка (процент) банковского кредита устанавливается каждым банком в отдельности с целью покрытия своих расходов на финансовые ресурсы, административных издержек, нормы прибыли и рисков. Каждая процентная ставка включает в себя все эти четыре величины.

Первая величина зависит от межбанковского рынка, либо от стоимости привлеченных депозитных средств, вторая и третья — от рабочих показателей самого банка, а четвертая — от конкретного клиента и структуры займа. Расчет степени риска по кредиту включает в себя рассмотрение платежеспособности, финансового состояния и кредитной истории клиента, характера залога, сроков, формы графика выплат и много другого. Чем ниже степень риска кредитодателя, тем дешевле будут предоставленные средства для клиента.

Процентная ставка может быть фиксированной и плавающей:

- фиксированная ставка — называется один раз и закрепляется в кредитном договоре вместе с периодом ее актуализации. С учетом периодических пересмотров используется для начисления процентов до окончания срока действия договора. Как правило, фиксированная ставка гораздо выше плавающей, так как включает анализ динамики изменения ставок рефинансирования ЦБ РФ, гарантии рисков инфляции, экономических кризисов, девальвации валюты кредита и т.д.;
- плавающая ставка — состоит из двух частей, фиксированной и меняющейся. Фиксированная часть называется один раз и действует до окончания срока действия кредитного договора.

### ***Варианты способов погашения кредита***

В задачах по погашению кредита (заема, ссуды, займа) решается одна и та же проблема: составить план погашения долга. Разработка плана погашения долгосрочного финансового обязательства заключается в составлении схемы (графика, расписания) периодических платежей должника. Такие расходы должника обычно называют *расходами по обслуживанию долга* или, более кратко, *срочными платежами*, расходами по займу. Варианты способов погашения разнообразны.

## Погашение займа равными срочными годовыми выплатами

Таблица 1.8.1

### Пример 1.8.1

Пусть следует погасить заем  $S = 20$  млн руб., выданный на 5 лет под 10% годовых. Погашение осуществлять равными платежами раз в год в конце года. Найти величину платежа. Построить график платежей и остатка долга.

**Решение.** Величина ежегодного (срочного) платежа складывается из двух частей:

$$Y = I + R,$$

где  $Y$  — срочная уплата,

$I$  — процентный платеж по кредиту,

$R$  — расход по погашению основного долга.

Для подсчета величины ежегодного платежа используем функцию **ПЛТ** табличного процессора Microsoft Excel, которая возвращает сумму периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки.

Синтаксис функции:

**ПЛТ**(ставка;кпер;пс;бс;тип),

где *Ставка* — процентная ставка по ссуде;

*Кпер* — общее число выплат по ссуде;

*Пс* — приведенная к текущему моменту стоимость, или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей, называемая также основной суммой;

*Бс* — требуемое значение будущей стоимости, или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент *бс* опущен, то он полагается равным 0 (нулю), т.е. для займа, например, значение *бс* равно 0;

*Тип* — число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата: 0 или опущен — в конце периода; 1 — в начале периода.

В нашем случае постоянная срочная уплата равна:

$$Y = \text{ПЛТ}(10\%; 5; 20; 0) = -5,2759.$$

Тогда схему погашения кредита можно представить в виде табл. 1.8.1. Эта же таблица, созданная средствами Microsoft Excel в режиме проверки формул, представлена на рис. 1.8.1. График платежей и остатка долга представлен на рис. 1.8.2.

## СХЕМА ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА РАВНЫМИ ВЫПЛАТАМИ ЕЖЕГОДНОГО ПЛАТЕЖА

| Сумма долга | 20            | Процент               | 10%                               |                      |
|-------------|---------------|-----------------------|-----------------------------------|----------------------|
| Годы        | Остаток долга | Величина платежа, $Y$ | Процентный платеж по кредиту, $I$ | Погашение долга, $R$ |
| 1           | 16,7241       | 5,2759                | 2,0000                            | 3,2759               |
| 2           | 13,1205       | 5,2759                | 1,6724                            | 3,6035               |
| 3           | 9,1566        | 5,2759                | 1,3121                            | 3,9639               |
| 4           | 4,7963        | 5,2759                | 0,9157                            | 4,3603               |
| 5           | 0,0000        | 5,2759                | 0,4796                            | 4,7963               |
|             |               | 26,3797               | 6,3797                            | 20,0000              |

|                                                           |             |               |                    |                              |                   |
|-----------------------------------------------------------|-------------|---------------|--------------------|------------------------------|-------------------|
| Microsoft Excel - К 2_1                                   |             |               |                    |                              |                   |
| Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка |             |               |                    |                              |                   |
| C3 =-ПЛТ(D1;A7;B1)                                        |             |               |                    |                              |                   |
|                                                           | A           | B             | C                  | D                            | E                 |
| 1                                                         | Сумма долга | 20            | процент            | 0,1                          |                   |
| 2                                                         |             | Остаток долга | Величина платежа Y | Процентный платеж по займу I | Погашение долга R |
| 3                                                         | 1           | =B1-E3        | =-ПЛТ(D1;A7;B1)    | =\$D\$1*B1                   | =C3-D3            |
| 4                                                         | 2           | =B3-E4        | =\$C\$3            | =\$D\$1*B3                   | =C4-D4            |
| 5                                                         | 3           | =B4-E5        | =\$C\$3            | =\$D\$1*B4                   | =C5-D5            |
| 6                                                         | 4           | =B5-E6        | =\$C\$3            | =\$D\$1*B5                   | =C6-D6            |
| 7                                                         | 5           | =B6-E7        | =\$C\$3            | =\$D\$1*B6                   | =C7-D7            |
| 8                                                         |             |               | =СУММ(C3:C7)       | =СУММ(D3:D7)                 | =СУММ(E3:E7)      |
| 9                                                         |             |               |                    |                              |                   |

Рис. 1.8.1. Таблица в режиме проверки формул

Таблица 1.8.2

## СХЕМА ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА РАВНЫМИ ЧАСТЯМИ

| Сумма долга | 20            | Процент               | 10%                               |                      |
|-------------|---------------|-----------------------|-----------------------------------|----------------------|
| Годы        | Остаток долга | Величина платежа, $Y$ | Процентный платеж по кредиту, $I$ | Погашение долга, $R$ |
| 1           | 16,0000       | 6,00000               | 2,00000                           | 4,00000              |
| 2           | 12,0000       | 5,60000               | 1,60000                           | 4,00000              |
| 3           | 8,0000        | 5,20000               | 1,20000                           | 4,00000              |
| 4           | 4,0000        | 4,80000               | 0,80000                           | 4,00000              |
| 5           | 0,0000        | 4,40000               | 0,40000                           | 4,00000              |
|             |               | 26,00000              | 6,00000                           | 20,00000             |

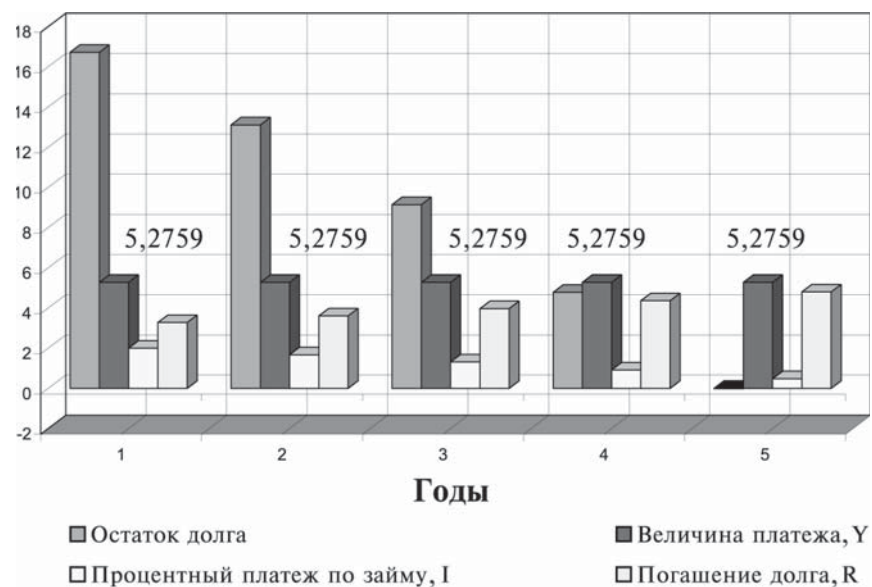


Рис. 1.8.2. График погашения кредита равными выплатами

*Погашение кредита равными выплатами основного долга**Пример 1.8.2*

Кредит в размере 20 тыс. руб. выдан на 5 лет под 10% годовых. Погашение долга должно происходить равными платежами, начисление процента в конце года. Составить план погашения долга.

**Решение.** Найдем годовую уплату долга:

$$R = S/N = 20/5 = 4 \text{ тыс. руб.}$$

В табл. 1.8.2 представлен план погашения кредита равными выплатами основного долга.

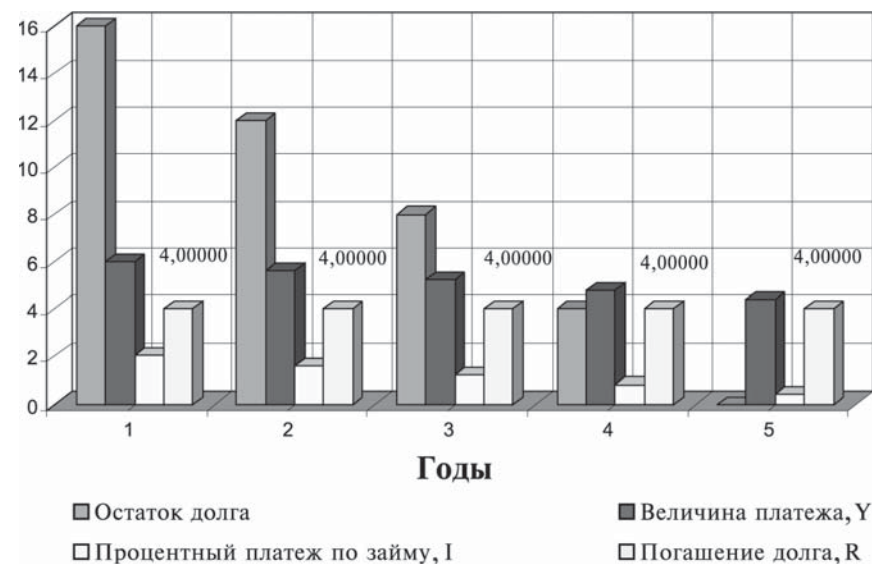


Рис. 1.8.3. Погашение кредита равными выплатами основного долга

**Погашение кредита выплатами, изменяющимися  
в арифметической прогрессии**

*✍ Пример 1.8.3*

Кредит в 20 тыс. руб. выдан под 10% годовых на 5 лет. Погашение осуществляется ежегодно и возрастают в арифметической прогрессии на 1,5 тыс. руб. Начисление процента осуществляется в конце года. Составить схему погашения кредита.

*Решение.* Для нахождения постоянной выплаты используем формулу суммы  $n$ -членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,$$

откуда первый член арифметической прогрессии равен:

$$a_1 = S_n/n - \frac{d \cdot (n-1)}{2} = 20/5 - \frac{1,5 \cdot (5-1)}{2} = 1.$$

В табл. 1.8.3 представлен план погашения кредита, когда выплаты изменяются в арифметической прогрессии.

*Таблица 1.8.3*

**ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА ВЫПЛАТАМИ, ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ  
В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ**

| Сумма долга | 20            | Процент             | 10 %                            | 1,5                |
|-------------|---------------|---------------------|---------------------------------|--------------------|
| Годы        | Остаток долга | Величина платежа, Y | Процентный платеж по кредиту, I | Погашение долга, R |
| 1           | 20,000        | 3,000               | 2,000                           | 1,000              |
| 2           | 19,000        | 4,400               | 1,900                           | 2,500              |
| 3           | 16,500        | 5,650               | 1,650                           | 4,000              |
| 4           | 12,500        | 6,750               | 1,250                           | 5,500              |
| 5           | 7,000         | 7,700               | 0,700                           | 7,000              |
|             |               | 27,500              | 7,500                           | 20,000             |

**Выплаты изменяются в геометрической прогрессии**

Еще одним из вариантов погашения займа являются выплаты, изменяющиеся в геометрической прогрессии.

*✍ Пример 1.8.4*

Кредит в размере 20 тыс. руб., выданный на 5 лет под 10% годовых, должен быть погашен ежегодными выплатами. Выплаты, идущие на погашение основного долга, должны возрастать в геометрической прогрессии на 5% ежегодно. Составить план погашения кредита.

*Решение.* Постоянная выплата равна (используем формулу суммы  $n$ -членов геометрической прогрессии):

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Откуда найдем первый член геометрической прогрессии:

$$b_1 = \frac{S_n (q - 1)}{q^n - 1}.$$

В нашем случае:  $b_1 = R_1 = \frac{20 \cdot (1,05 - 1)}{1,05^5 - 1} = 3,6195.$

В табл. 1.8.4 представлен план погашения кредита, когда выплаты изменяются в геометрической прогрессии.

*Таблица 1.8.4*

**ПЛАН ПОГАШЕНИЯ КРЕДИТА ВЫПЛАТАМИ, ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ  
В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ**

| Сумма долга | 20            | Процент             | 10%                             | 1,05               |
|-------------|---------------|---------------------|---------------------------------|--------------------|
| Годы        | Остаток долга | Величина платежа, Y | Процентный платеж по кредиту, I | Погашение долга, R |
| 1           | 20            | 5,6195              | 2,0000                          | 3,61950            |
| 2           | 16,380504     | 5,4385              | 1,6381                          | 3,8005             |
| 3           | 12,580033     | 5,2485              | 1,2580                          | 3,9905             |

|             |               |                     |                                 |                    |
|-------------|---------------|---------------------|---------------------------------|--------------------|
| Сумма долга | 20            | Процент             | 10%                             | 1,05               |
| Годы        | Остаток долга | Величина платежа, Y | Процентный платеж по кредиту, I | Погашение долга, R |
| 4           | 8,589539      | 5,0490              | 0,8590                          | 4,1900             |
| 5           | 4,39952       | 4,8395              | 0,4400                          | 4,3995             |
|             |               | 26,1950             | 6,1950                          | 20,0000            |

### Создание погасительного фонда

Если по условиям кредита должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для обеспечения этого. При значительной сумме долга возникает необходимость в создании погасительного фонда.

Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (например, на специальный счет в банке), на которые начисляются проценты. Сумма взносов в фонд вместе с начисленными процентами, накопленная к концу срока в погасительном фонде, должна быть равна сумме долга. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными. Если погасительный фонд создается для уплаты кредита, условия которого предусматривают периодическую выплату процентов, то текущие расходы должника по кредиту состоят из двух элементов: платежа в погасительный фонд и выплаты процентов по кредиту.

При создании погасительного фонда фигурируют две ставки процентов —  $i$  и  $g$ . Первая определяет скорость роста суммы погасительного фонда, вторая — сумму выплачиваемых за кредит процентов. Создание погасительного фонда выгодно должнику, если  $i > g$ , так как в этом случае должник на аккумулированные в погасительном фонде средства получает больший процент, чем сам выплачивает по займу.

При условии, что взносы в погасительный фонд и начисление процентов на него, а также выплата процентов по кредиту осуществляются один раз в конце года, срочную уплату определяют по формуле:

$$Y = I + R,$$

где  $Y$  — срочная уплата,

$I$  — размер процентов, выплачиваемых кредитору,

$R$  — погасительный платеж.

При постоянных погасительных платежах платежи образуют наращенную сумму, которая по величине равна долгу. Размер погасительного платежа рассчитывается по формуле:

$$R = C_0 : \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

где  $C_0$  — общая сумма долга.

### Пример 1.8.5

Кредит в размере 10 млн руб., выданный под 6% годовых, должен быть погашен через 5 лет. Решено создать погасительный фонд. На погасительные платежи в банке начисляют 8% в год. Необходимо разработать план погашения кредита.

*Решение:* Погасительный взнос равен:

$$R = 10 : \frac{(1 + 0,08)^5 - 1}{0,8} = 1,70456.$$

Срочная уплата составит:

$$R = 10 \cdot 0,06 + 1,70456 = 2,3046.$$

План погашения кредита представлен в табл. 1.8.5.

Таблица 1.8.5

| Сумма | 10       |                       | Процент по кредиту, $g$           | Процент на погасительный фонд, $i$ |
|-------|----------|-----------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
|       |          |                       | 6%                                | 8%                                 |
| Годы  | Фонд     | Величина платежа, $Y$ | Процентный платеж по кредиту, $I$ | Погасительный платеж, $R$          |
| 1     | 1,704560 | 2,3046                | 0,6000                            | 1,70456                            |
| 2     | 1,840930 | 2,3046                | 0,6000                            | 1,70456                            |
| 3     | 1,988204 | 2,3046                | 0,6000                            | 1,70456                            |
| 4     | 2,147260 | 2,3046                | 0,6000                            | 1,70456                            |
| 5     | 2,319041 | 2,3046                | 0,6000                            | 1,70456                            |
|       | 10,0000  | 11,5228               | 3,0000                            | 8,5228                             |

## *Глава 2*

### ОЦЕНКА И АНАЛИЗ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

#### 2.1. Виды потоков платежей и их основные параметры

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени, например, погашение задолженностей в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсий и т.д. Такого рода последовательность, или ряд платежей, называют *потоком платежей (cash flow stream)*. Отдельный элемент такого ряда называется членом потока: *(cash flow)*  $Cf_0, Cf_1, \dots, Cf_n$ .

Отдельный элемент такого численного ряда  $Cf_t$  представляет собой разность между всеми поступлениями (притоками) денежных средств и их расходом (оттоками) на конкретном временном отрезке проведения финансовой операции. Таким образом, величина  $Cf_t$  может иметь как положительный, так и отрицательный знак.

Потоки платежей бывают: регулярные, когда размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу через равные интервалы между платежами, и нерегулярные.

Одним из ключевых понятий в финансовых и коммерческих расчетах является понятие *аннуитета*. **Аннуитет (annuity)** представляет собой частный случай денежного потока, в котором длительности периодов равны между собой.

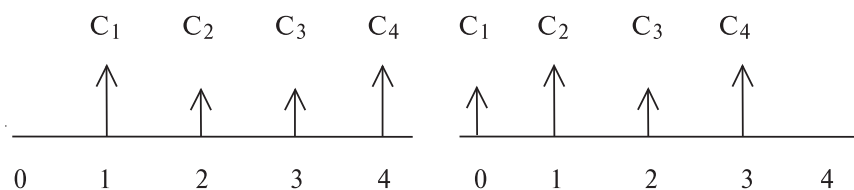
Аннуитет еще называют финансовой рентой или просто рентой. Рентой является получение процентов по облигации, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий и т.д. Любое денежное поступление называется *членом аннуитета (членом ренты)*, а величина постоянного временного интервала между двумя последовательными денежными поступлениями называется *периодом аннуитета (периодом ренты)*. Интервал времени от начала первого периода аннуитета до конца последнего называется *сроком аннуитета*.

В финансовой практике часто встречаются так называемые *простые, или обыкновенные, аннуитеты* (ordinary annuity, regular

annuity), которые предполагают получение или выплаты одинаковых по величине сумм на протяжении всего срока операции в конце каждого периода (года, полугодия, квартала, месяца и т.д.). Таким образом, согласно определению, простой аннуитет обладает двумя важными свойствами:

- все его  $n$ -элементов равны между собой:  
 $Cf_1 = Cf_2 \dots = Cf_n = A$ ;
- отрезки времени между выплатой/получением сумм  $CF$  одинаковы, т.е.  $t_n - t_{n-1} = \dots = t_2 - t_1$ .

Очень важным является различие по моменту выплат платежей в пределах периода аннуитета. Если платежи осуществляются в конце этих периодов, то соответствующий аннуитет называется *постнумерандо*, если платежи производятся в начале периодов, то аннуитет называют *пренумерандо* (см. рис. 2.1.1).



**Рис. 2.1.1.** Графическое представление потоков постнумерандо и пренумерандо

Аннуитет называется *постоянным*, если все денежные поступления равны между собой. Если денежные поступления варьируются, то аннуитет называют *переменным*. Если число периодов ограничено, аннуитет называется *срочным*. Если в течение каждого базового периода начисления процентов денежные поступления происходят  $p$  раз, то аннуитет часто называют  *$p$ -срочным*. Часто в качестве такого базового периода выступает календарный год.

Аннуитет называется *отсроченным*, если начало его первого периода сдвинуто вправо по временной оси от момента времени, на который происходит анализ. Аннуитет называется *бес-срочным* (или вечной рентой), если число его элементов неогра-

ниченно большое (в том числе достаточно большое). В западной практике к бессрочным относятся аннуитеты, рассчитанные на 50 и более лет.

## 2.2. Оценка денежных потоков

Количественный анализ денежных потоков, генерируемых за определенный период времени в результате реализации финансовой операции или функционирования каких-либо активов, в общем случае сводится к решению двух задач:

- прямой, предполагающей нахождение суммарной оценки наращенного денежного потока ( $FV$  — будущей стоимости потока за  $n$  периодов);
- обратной, предполагающей суммарную оценку дисконтированного денежного (приведенного) потока ( $PV$  — современной стоимости потока за  $n$  периодов).

Часто возникает необходимость определения и ряда других параметров финансовых операций, важнейшими из которых являются:

- $Cf_t$  — величина потока платежей в периоде  $t$ ;
- $r$  — процентная ставка;
- $n$  — срок (количество периодов) проведения операции.

*Наращенная сумма* — сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами.

Под *современной стоимостью потока* платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока аннуитета или некоторый упреждающий момент времени.

Ключевым моментом при оценке денежного потока является молчаливая предпосылка о том, что анализ ведется с позиции «разумного инвестора», т.е. инвестора, не просто накапливающего полученные денежные средства, а немедленно инвестирующего их с целью получения дополнительного дохода. Именно этим объясняется тот факт, что при оценке потоков в обоих направлениях (и при наращении, и при дисконтировании) предполагается капитализация обычно по схеме сложных процентов.

### Оценка переменного аннуитета постнумерандо

Пусть  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – аннуитет, период которого совпадает с базовым периодом начисления процентов по ставке  $r$ . Требуется найти стоимость данного аннуитета с позиции будущего и настоящего момента времени. *Прямая задача* предполагает оценку с позиции будущего, т.е. на конец периода  $n$ , когда реализуется схема наращивания, которую для аннуитета постнумерандо можно представить следующим образом (рис. 2.2.1).

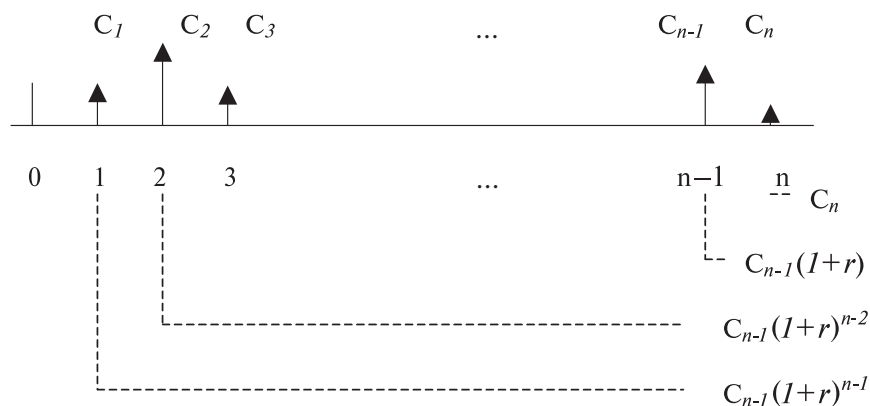


Рис. 2.2.1. Логика решения прямой задачи для аннуитета постнумерандо

Таким образом, на первое денежное поступление  $C_1$  начисляются сложные проценты за  $(n - 1)$  период и оно в конце  $n$ -го периода станет равным  $C_1(1 + r)^{n-1}$ . На второе денежное поступление  $C_2$  начисляются сложные проценты за  $(n - 2)$  периода и оно станет равным  $C_2(1 + r)^{n-2}$  и т.д. На предпоследнее денежное поступление  $C_{n-1}$  проценты начисляются за один период и оно будет в конце периода равно  $C_{n-1}(1 + r)$ . На  $C_n$  проценты не начисляются.

Денежный поток переменного аннуитета *постнумерандо* составит:

$$FV_{pst}^a = C_1 (1 + r)^{n-1} + C_2 (1 + r)^{n-2} + \dots + C_{n-1} (1 + r) + C_n = \sum_{k=1}^n C_k (1 + r)^{n-k}, \quad (2.2.1)$$

или, используя обозначение множителя наращивания:

$$FV_{pst}^a = \sum_{k=1}^n C_k FM3(r, n - k). \quad (2.2.2)$$

*Обратная задача* подразумевает оценку с позиции текущего момента (рис. 2.2.2). Приведенная стоимость денежного потока аннуитета постнумерандо рассчитывается по формуле:

$$PV_{pst}^a = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{(1 + r)^k}$$

или

$$PV_{pst}^a = \sum_{k=1}^n C_k FM4(r, k). \quad (2.2.4)$$

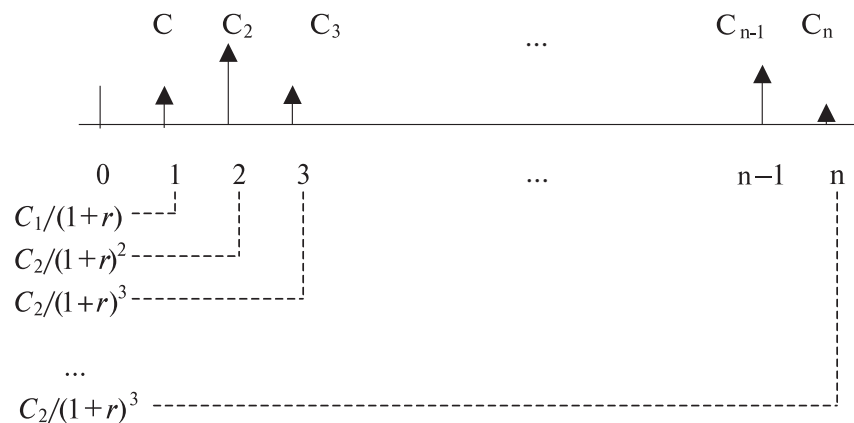


Рис. 2.2.2. Логика решения обратной задачи для аннуитета постнумерандо

### Пример 2.2.1

Клиент в конце каждого года вкладывает 3 тыс. руб. в банк, выплачивающий сложные проценты по процентной ставке 25% годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через 7 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк в начале первого года, то какой величины должен быть взнос?

**Решение.** Первый вариант помещения денег является постоянным аннуитетом постнумерандо, член которого равен 3 тыс. руб., срок — 7 лет, и период равен одному году. Изобразим схематично эту ситуацию на оси времени (одно деление равно одному году), помещая над осью члены аннуитета (рис. 2.2.3)

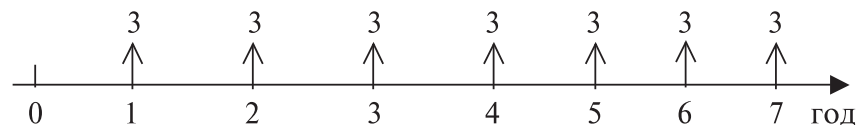


Рис. 2.2.3

Для определения суммы на счете через 7 лет (т.е. будущей стоимости аннуитета) можно воспользоваться общей формулой (2.2.1), полагая  $r = 0,25$ ,  $C_1 = C_2 = \dots = C_7 = 3$ .

$$FV_{pst}^a = 3 \cdot FM3(25\%, 7) = 3 \cdot 15,0735 = 45,221 \text{ тыс. руб.}$$

Значение коэффициента наращивания аннуитета  $FM3(25\%, 1)$  можно либо взять из финансовых таблиц, либо вычислить непосредственно по формуле, определяющей этот коэффициент.

Для определения величины взноса (в начале первого года), который при наращении сложными процентами через 7 лет станет равным 45,221 тыс. руб., можно воспользоваться формулой нахождения приведенной стоимости аннуитета. Применяя формулу (2.2.4), находим:

$$PV_{pst}^a = 3 \cdot FM4(25\%, 7) = 3 \cdot 3,1611 = 9,483 \text{ тыс. руб.}$$

### Оценка переменного аннуитета пренумерандо

Определим наращенный поток переменного аннуитета пренумерандо.

$$FV_{pre}^a = \sum_{k=1}^n C_k (1+r)^{n-k+1} \quad (2.2.5)$$

или

$$FV_{pre}^a = FV_{pst}^a (1+r). \quad (2.2.6)$$

### Оценка постоянного аннуитета постнумерандо

Рассмотрим случай постоянного срочного аннуитета постнумерандо. Пусть в течение  $n$  лет в банк в конце каждого года вносится по  $A$  руб. На взносы начисляются сложные проценты, по  $r$  процентов годовых. Таким образом, все члены ренты, кроме последнего, приносят проценты — на первый член проценты начисляются  $n-1$  год, на второй  $n-2$  и т.д.

Наращенная к концу срока сумма составит:

$$FV_{pst}^a = A(1+r)^{n-1} + A(1+r)^{n-2} + \dots + A(1+r) + A.$$

Перепишем этот же ряд в обратном порядке:

$$FV_{pst}^a = A + A(1+r) + \dots + A(1+r)^{n-2} + A(1+r)^{n-1}.$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию\* со знаменателем  $(1+r)$  и первым членом  $A$ , число членов  $n$ .

$$FV_{pst}^a = A \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = A \frac{(1+r)^n - 1}{r} = A \cdot FM3(r, n) \quad (2.2.7)$$

где  $FM3(r, n)$  — коэффициент наращивания аннуитета, представляет собой наращенную сумму ренты, член которой равен 1.

Он зависит только от срока и процентной ставки. Значения коэффициента наращивания аннуитета табулированы для различных значений процентной ставки и сроков действия аннуитета.

\*  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$

### Пример 2.2.1

На счет в банке в течение пяти лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 500 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 30%. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

**Решение.** Поскольку период ренты равен одному году, то это годовая рента; проценты начисляются один раз в год; взносы будут в конце периода ренты, постнумерандо, значит, это обычная рента; сумма платежа постоянна на протяжении всего срока ренты, что характерно для постоянной ренты; число членов ренты пять, т.е. конечно, следовательно, это ограниченная рента; а выплаты носят безусловный характер, таким образом, это верная рента.

Сумма всех взносов с начисленными процентами будет равна:

$$FV_{pst}^a = A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 500 \cdot \frac{(1+0,3)^5 - 1}{0,3} = 4521,55.$$

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами, содержащими коэффициенты наращивания ренты:

$$FV_{pst}^a = A \cdot FM_3(r, n) = 500 \cdot FM_3(30\%, 5) = 500 \cdot 9,0431 = 4521,55.$$

Сумма взносов в течение 5 лет составит:  $S = 5 \cdot 500 = 2500$  руб. Следовательно, сумма начисленных процентов будет равна:

$$I = FV - S = 4521,55 - 2500 = 2021,55 \text{ руб.}$$

Таким образом, доход владельца счета за 5 лет составит 2021,55 руб.

Приведенная стоимость постоянного аннуитета постнумерандо  $PV_{pst}^a$  может быть рассчитана следующим образом:

$$PV_{pst}^a = A \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM_4(r, n). \quad (2.2.8)$$

Множитель  $FM_4(r, n)$  называется коэффициентом дисконтирования ренты (аннуитета) и как сумма членов геометрической прогрессии равен величине:

$$FM_4(r, n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}.$$

### Оценка постоянного аннуитета пренумерандо

Рассмотрим нахождение величин наращенной суммы и приведенной стоимости срочного постоянного аннуитета пренумерандо.

Наращенный денежный поток имеет вид:

$$FV_{pre}^a = A(1+r)^n + A(1+r)^{n-1} + \dots + A(1+r) = A \sum_{k=1}^n (1+r)^{n-k+1} \quad (2.2.9)$$

$$FV_{pre}^a = FV_{pst}^a (1+r) \quad (2.2.10)$$

### Оценка постоянного р-срочного аннуитета постнумерандо

Если  $r$  — процентная ставка (в десятичных дробях) за базовый период, а начисление сложных процентов происходит  $m$  раз в течение этого периода, то наращенный поток, начиная с последнего денежного поступления, имеет вид:

$$A, A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m, A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{2m}, \dots, A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(n-1)m}$$

Получили геометрическую прогрессию, первый член которой равен  $A$  и знаменатель —  $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$ . Следовательно, сумма  $n$  первых членов этой прогрессии равна:

$$FV_{pst}^a = A \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1} = A \frac{\frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{r}{m}}}{\frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1}{\frac{r}{m}}} = A \frac{FM_3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM_3\left(\frac{r}{m}, m\right)}. \quad (2.2.11)$$

Рассмотрим ситуацию, когда в течение базового периода начисления процентов денежные поступления происходят несколько раз, а проценты начисляются один раз в конце периода.

Пусть в течение базового периода денежные поступления происходят  $p$  раз и один раз в конце периода начисляются проценты в соответствии со ставкой  $r$ .

На последнее  $p$ -е поступление проценты не начисляются и оно остается  $A$ . На предпоследнее  $(p-1)$ -е поступление начисляются сложные проценты за  $1/p$ -ю часть периода, и оно будет равно  $A(1+r)^{1/p}$ . На  $(p-2)$ -е поступление начисляются сложные проценты за  $2/p$ -ю часть периода и оно будет равно  $A(1+r)^{2/p}$  и т.д. до первого включительно, которое будет равно  $A(1+r)^{p-1/p}$ .

Полученная последовательность величин представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом  $A$ , знаменателем  $(1+r)^{1/p}$  и числом членов, равным  $p$ , поэтому сумма этих величин равна

$$A \frac{(1+r)^{\frac{1}{p}p} - 1}{(1+r)^{\frac{1}{p}} - 1} = A \frac{r}{(1+r)^{\frac{1}{p}} - 1}.$$

Таким образом, имеем аннуитет, в котором денежные поступления равны величине  $A \frac{r}{(1+r)^{\frac{1}{p}} - 1}$  и происходят в конце каждого базового периода начисления процентов.

Пользуясь формулой 2.1.7, получим

$$FV_{pst}^a = A \frac{r}{(1+r)^{\frac{1}{p}} - 1} \cdot FM3(r, n) \quad (2.2.12)$$

$$\text{т.к. } FM3(r, n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \text{ или } FV_{pst}^a = A \frac{FM3(r, n)}{FM3(r, \frac{1}{p})}. \quad (2.2.13)$$

Самостоятельно выведите формулы приведенной стоимости переменного и постоянного аннуитета пренумерандо и проиллюстрируйте графически их представление.

## 2.3. Критерии оценки инвестиционных проектов

Инвестиции — это долгосрочные финансовые вложения экономических ресурсов с целью создания и получения выгоды в будущем, которая должна быть выше начальной величины вложений. Более подробно это понятие определено Федеральным законом (ФЗ) об инвестиционной деятельности в Российской Федерации, осуществляемой в форме капитальных вложений, от 25.02.99 № 39-ФЗ, согласно которому инвестиции — денежные средства, ценные бумаги, иное имущество, в том числе имущественные права, иные права, имеющие денежную оценку, вкладываемые в объекты предпринимательской и/или иной деятельности в целях получения прибыли и/или достижения иного полезного эффекта.

Существует несколько видов инвестиций:

- финансовые инвестиции — вложения в акции, облигации и другие ценные бумаги, а также банковские депозиты и объекты тезаврации (накопление золота в виде страховых фондов);
- нефинансовые инвестиции — неденежные инвестиции, связанные с вложением в инвестиционный проект нематериальных активов (прав, лицензий, ноу-хау) и материальных (машин, оборудования, земельных участков и т.д.);
- прямые инвестиции — капитальные вложения\* непосредственно в производство какой-либо продукции, включающие покупку, создание или расширение фондов предприятия, а также в управление и контроль над инвестируемым производством;
- реальные инвестиции — в узком смысле — вложения в основной капитал и на прирост материальных запасов. В этом смысле указанное понятие применяется в анализе наиболее часто.

\* Капитальные вложения — инвестиции в основной капитал (основные средства), в том числе затраты на новое строительство, расширение, реконструкцию и техническое перевооружение действующих предприятий, приобретение машин, оборудования, инструмента, инвентаря, проектно-изыскательские работы и другие затраты.

По определению Федерального закона **инвестиционный проект** есть обоснование экономической целесообразности, объема и сроков осуществления капитальных вложений, в том числе необходимая проектно-сметная документация, разработанная в соответствии с законодательством Российской Федерации и утвержденными в установленном порядке стандартами (нормами и правилами), а также описание практических действий по осуществлению инвестиций (бизнес-план).

Инвестиционная деятельность определена Федеральным законом как вложение инвестиций и осуществление практических действий в целях получения прибыли и (или) достижения иного полезного эффекта. То есть инвестиционный процесс можно представить как последовательность связанных инвестиций, растянутых во времени, отдача от которых также распределена во времени. Этот процесс характеризуется двусторонним потоком платежей, где отрицательные члены потока являются вложениями денежных средств в инвестиционный проект, а положительные члены потока — доходами от инвестированных средств.

В Методических рекомендациях по оценке эффективности инвестиционных проектов, утвержденных Минэкономики РФ, Минфином РФ, Госстроем РФ от 21.06.99 №ВК 477 (далее — Методические рекомендации), понятие «проект» рассматривается в двух смыслах: как документация и как деятельность. Говоря о критериях оценки инвестиционных проектов, мы будем употреблять термин «проект» во втором смысле, согласно которому под **проектом** следует понимать комплекс действий (работ, услуг, приобретений, управленческих операций и решений) и определение предстоящей деятельности, направленных на достижение сформулированной цели.

Суть всех методов оценки инвестиционных проектов базируется на следующей простой схеме: исходные инвестиции при реализации какого-либо проекта генерируют денежный поток  $Cf_1, Cf_2, \dots, Cf_n$ . Инвестиции признаются эффективными, если данный инвестиционный процесс отвечает следующим требованиям:

- чистая прибыль от данного вложения превышает чистую прибыль от помещения средств на банковский депозит или прибыль от других вложений;

- рентабельность инвестиций выше уровня инфляции;
- рентабельность проекта с учетом фактора времени (временной стоимости денег) выше рентабельности альтернативных проектов;
- рентабельность активов предприятия после осуществления проекта будет не ниже необходимого, критического (возможно предпроектного) уровня и превысит среднюю расчётную ставку по заёмным средствам (т.е. дифференциал финансового рычага будет положительным);
- данный проект соответствует генеральной стратегической линии предприятия с точки зрения сроков окупаемости вложений, наличия финансовых источников покрытия издержек до начала окупаемости проекта, обеспечения достаточно стабильных поступлений (в промышленности также и с точки зрения формирования рациональной ассортиментной структуры производства) и т.д.

Критерии (показатели, характеристики финансовых потоков), используемые при анализе инвестиционной деятельности, можно подразделить на две группы в зависимости от того, учитывается или нет временной параметр, а именно:

- динамические, основанные на дисконтированных оценках;
- статистические, основанные на учетных (номинальных) оценках.

К первой группе относятся:

- чистая текущая стоимость (Net Present Value, NPV);
- индекс рентабельности инвестиции (Profitability Index, PI);
- внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return, IRR);
- модифицированная внутренняя норма доходности (Modified Internal Rate of Return, MIRR);
- дисконтированный срок окупаемости инвестиции (Discounted Payback Period, DPP).

Ко второй группе относятся:

- срок окупаемости инвестиции (Payback Period, PP);
- коэффициент эффективности инвестиции (Accounting Rate of Return, ARR).

Классификация показателей оценки эффективности инвестиций представлена на рис. 2.3.1.

Данные показатели, равно как и соответствующие им методы, используются в двух вариантах:

- для определения эффективности независимых инвестиционных проектов (так называемая абсолютная эффективность), когда делается вывод: принять проект или отклонить;
- для определения эффективности взаимоисключающих друг друга проектов (сравнительная эффективность), когда делается вывод о том, какой проект принять из нескольких альтернативных.



**Рис. 2.3.1.** Классификация показателей оценки эффективности инвестиций

В последнее время в качестве основного измерителя эффективности инвестиционных проектов чаще всего используют метод расчета чистого приведенного дохода (чистой современной стоимости) — Net Present Value (NPV).

Суть этого метода состоит в определении разницы между инвестиционными затратами и будущими доходами, выраженной в денежной величине, скорректированной во времени. Поскольку приток денежных средств распределен во времени, он дисконтируется с заданной процентной ставкой  $r$ .

Допустим, делается прогноз, что разовая инвестиция ( $IC$ ) будет генерировать в течение  $n$  лет годовые доходы в размере  $Cf_1, Cf_2, \dots, Cf_n$ . Общая накопленная величина дисконтированных доходов (PV) и чистый приведенный доход (NPV) соответственно рассчитываются по формулам:

$$PV = \sum_k \frac{Cf_k}{(1+r)^k}, \quad (2.3.1)$$

$$NPV = \sum_k \frac{Cf_k}{(1+r)^k} - IC, \quad (2.3.2)$$

где  $Cf_k$  — годовые денежные поступления в течение  $n$  лет,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;

$IC$  — стартовые инвестиции;

$r$  — ставка дисконтирования.

Очевидно, что если:

- $NPV > 0$ , проект следует принять;
- $NPV < 0$ , проект не принимается;
- $NPV = 0$  проект не имеет ни прибыли, ни убытков.

Таким образом, отрицательное значение категорически отклоняет проект, однако положительное вовсе не означает, что проект должен быть немедленно принят. Причина кроется в том, что одной из главных проблем метода чистого приведенного дохода является то, что в самом условии его применения априори принимается идентичный уровень для всех рассматриваемых инвестиций. Например, при анализе инвестиций в обновление парка компьютеров компании или в построение локальных сетей и во внедрение комплексной системы управле-

ния и планирования (ERP-системы) риски далеко не равнозначны, мало того, разница столь велика, что может нивелировать сам итог расчета.

Важным моментом является выбор ставки дисконтирования. Часто предлагают использовать норму дисконта, равную приемлемой для инвестора норме дохода на капитал. Это предложение означает, что экономисты явным образом обращаются к инвестору как к эксперту, который должен назвать им некоторое число исходя из своего опыта и интуиции. Кроме того, при этом игнорируется изменение указанной нормы во времени.

При использовании чистой текущей стоимости значение экономического эффекта во многом определяется выбранным для расчета нормативом (коэффициентом) дисконтирования — показателем, используемого для приведения по фактору времени ожидаемых денежных поступлений и платежей. Выбор численного значения этого показателя зависит от таких факторов, как цели инвестирования и условия реализации проекта; уровень инфляции в конкретной национальной экономике; величина инвестиционного риска; альтернативные возможности вложения капитала; финансовые и иные соображения и представления инвестора.

Считается, что для различных классов инвестиций могут выбираться различные значения коэффициента дисконтирования. В частности, вложения, связанные с защитой рыночных позиций предприятия, оцениваются по весьма низкому нормативу 6%. Инвестициям в обновление основных фондов соответствует норматив дисконтирования 12%, а вложениям с целью экономии текущих затрат — 15%. Для вложений, нацеленных на увеличение доходов предприятия, используют коэффициент дисконтирования 20%, а для рискованных капиталовложений — 25%. В литературе подчеркивается зависимость коэффициента дисконтирования от степени риска проекта. Для обычных проектов приемлемой считается ставка 16%, для новых проектов на стабильном рынке — 20%, для проектов, базирующихся на новых технологиях, — 24%.

Хотя в конечном счете выбор значения дисконта, который играет роль порогового (минимального) значения норматива

рентабельности капиталовложений, является прерогативой инвестора, в практике проведения инвестиционных расчетов часто в качестве ориентира используют ставку процента государственных ценных бумаг. Считается, что при этой ставке государство гарантирует хозяйствующим субъектам возврат инвестируемого капитала без какого-либо риска. В российской практике ориентиром является также ставка рефинансирования Центрального банка, определяющая нижнюю границу платы за кредит [33 и др.].

Если проект предполагает не разовую инвестицию, а последовательное инвестирование финансовых ресурсов в течение нескольких лет ( $m$ ), то формула для расчета модифицируется:

$$NPV = \sum_{k=1}^n [R_k / (1+i)^k] - \sum_{j=1}^m [IC_j / (1+i)^j], \quad (2.3.3)$$

где  $i$  — прогнозируемый средний уровень инфляции.

#### Пример 2.3.1

Фирма рассматривает целесообразность инвестиционного проекта, стоимость которого составляет 210 тыс. долларов. По прогнозам, ежегодные поступления составят 55 тыс. долларов. Проект рассчитан на 5 лет. Необходимая норма прибыли составляет 8%. Следует ли принять этот проект?

**Решение.** Чистая стоимость проекта равна:

$$NPV = 55000 \cdot (1,08)^{-1} + 55000 \cdot (1,08)^{-2} + 55000 \cdot (1,08)^{-3} + 55000 \cdot (1,08)^{-4} + 55000 \cdot (1,08)^{-5} - 210000 = 204265 - 210000 = -5735 \text{ долларов.}$$

Поскольку величина чистой текущей стоимости  $-5735$  долларов, т.е.  $NPV < 0$ , то проект не может быть принят.

#### Пример 2.3.2

Руководство предприятия собирается внедрить новую машину, которая выполняет операции, производимые в настоящее время вручную. Машина стоит вместе с установкой \$5000 со сроком эксплуатации 5 лет и нулевой ликвидационной стоимостью. По оценкам финансового отдела предприятия внедрение машины за счет экономии ручного труда позволит обеспечить дополнительный входной поток денег \$1800. На четвертом году эксплуатации машина потребует ремонт стоимостью \$300.

Экономически целесообразно ли внедрять новую машину, если стоимость капитала предприятия составляет 20%.

*Решение.* Представим условия задачи в виде таблицы в Microsoft Excel (табл. 2.3.1).

Таблица 2.3.1

| Наименование денежного потока | Год(ы) | Денежный поток                          |        |        |
|-------------------------------|--------|-----------------------------------------|--------|--------|
|                               |        | Притоки                                 | Оттоки | Сальдо |
| Исходная инвестиция           | Сейчас |                                         | –5000  | –5000  |
| Входной денежный поток        | 1      | 1800                                    |        | 1800   |
|                               | 2      | 1800                                    |        | 1800   |
|                               | 3      | 1800                                    |        | 1800   |
|                               | 4      | 1800                                    | –300   | 1500   |
|                               | 5      | 1800                                    |        | 1800   |
| Показатель дисконта           | 20%    | Современное<br>чистое значение<br>(NPV) |        |        |

Для расчета значения NPV воспользуемся финансовой функцией Microsoft Excel ЧПС, которая возвращает величину чистой приведенной стоимости инвестиции, используя ставку дисконтирования, а также стоимости будущих выплат (отрицательные значения) и поступлений (положительные значения).

Синтаксис функции: ЧПС(ставка;значение1;значение2; ...) где ставка — ставка дисконтирования за один период, значение1, значение2, ... — от 1 до 29 аргументов, представляющих расходы и доходы.

Считается, что инвестиция, значение которой вычисляет функция ЧПС, начинается за один период до даты денежного взноса *значение1* и заканчивается с последним денежным взносом в списке. Вычисления функции ЧПС базируются на будущих денежных взносах. Если первый денежный взнос приходится на начало первого периода, то первое значение следует добавить к результату функции ЧПС, но не включать в список аргументов.

Расчет NPV с использованием функции ЧПС представлен на рис. 2.3.2.

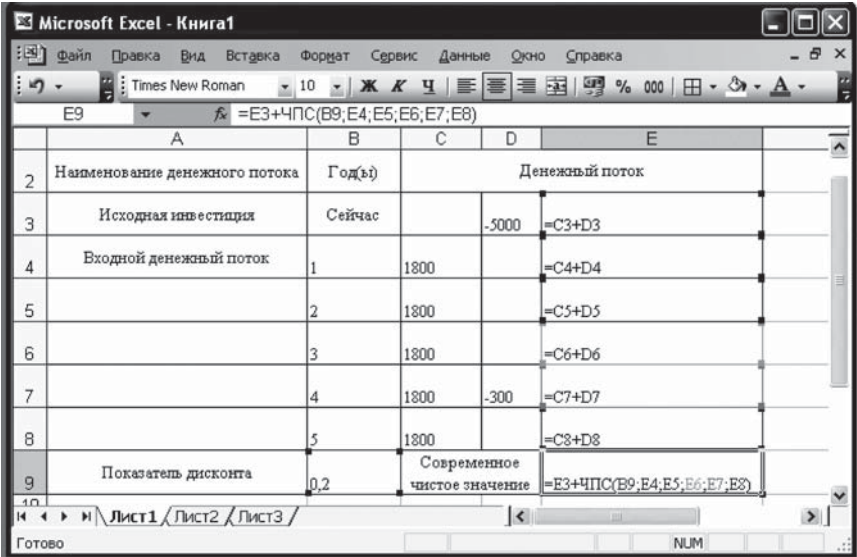


Рис. 2.3.2. Расчет NPV с использованием финансовой функции ЧПС

В результате расчетов  $NPV = 238,43 > 0$ , и поэтому с финансовой точки зрения проект следует принять.

Полученная сумма 238,43 представляет собой некоторый «запас прочности», призванный компенсировать возможную ошибку при прогнозировании денежных потоков. Американские финансовые менеджеры говорят: это деньги, отложенные на «черный день».

Рассмотрим теперь вопрос зависимости показателя NPV и, следовательно сделанного на его основе вывода, от нормы доходности инвестиций. Другими словами, в рамках данного примера ответим на вопрос: что если показатель доходности инвестиций (стоимость капитала предприятия) станет больше? Как должно измениться значение NPV?

Расчет показывает, что при  $r = 24\%$  получим  $NPV = -185,20$ , т.е. критерий является отрицательным и проект следует откло-

нить. Интерпретация этого феномена может быть проведена следующим образом. О чем говорит отрицательное значение NPV? О том, что исходная инвестиция не окупается, т.е. положительные денежные потоки, которые генерируются этой инвестицией, не достаточны для компенсации (с учетом стоимости денег во времени) исходной суммы капитальных вложений. Вспомним, что стоимость собственного капитала компании — это доходность альтернативных вложений своего капитала, которое может сделать компания. При  $r = 20\%$  компании более выгодно вложить деньги в собственное оборудование, которое за счет экономии генерирует денежный поток \$1800 в течение ближайших пяти лет; причем каждая из этих сумм в свою очередь, инвестируется под 20% годовых. При  $r = 24\%$  компании более выгодно сразу же инвестировать имеющиеся у нее \$5000 под 24% годовых, нежели инвестировать в оборудование, которое за счет экономии будет «приносить» денежный доход \$1800, который, в свою очередь, будет инвестироваться под 24% годовых.

*Общий вывод таков:* при увеличении нормы доходности инвестиций (стоимости капитала инвестиционного проекта) значение критерия NPV уменьшается.

Для полноты представления информации, необходимой для расчета NPV, приведем типичные денежные потоки.

Типичные входные денежные потоки:

- дополнительный объем продаж и увеличение цены товара;
- уменьшение валовых издержек (снижение себестоимости товаров);
- остаточное значение стоимости оборудования в конце последнего года инвестиционного проекта (так как оборудование может быть продано или использовано для другого проекта);
- высвобождение оборотных средств в конце последнего года инвестиционного проекта (заккрытие счетов дебиторов, продажа остатков товарно-материальных запасов, продажа акций и облигаций других предприятий).

Типичные выходные потоки:

- начальные инвестиции в первый год(ы) инвестиционного проекта;

- увеличение потребностей в оборотных средствах в первый год(ы) инвестиционного проекта (увеличение счетов дебиторов для привлечения новых клиентов, приобретение сырья и комплектующих для начала производства);
- ремонт и техническое обслуживание оборудования;
- дополнительные непроизводственные издержки (социальные, экологические и т.п.).

### *Индекс рентабельности инвестиций*

Метод расчета индекса рентабельности (Profitability Index, PI) является следствием метода расчета NPV:

$$PI = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{C_k}{(1+r)^k}}{IC} \quad (2.3.4).$$

Если  $PI > 1$ , то проект следует принять;  $PI < 1$ , то проект следует отвергнуть;  $PI = 1$ , то проект ни прибыльный, ни убыточный.

В отличие от чистой приведенной стоимости индекс рентабельности — относительный показатель; он характеризует уровень доходов на единицу затрат, т.е. эффективность вложений; чем больше значение данного показателя, тем выше отдача каждого рубля, инвестированного в данный проект. Поэтому критерий PI удобен при выборе одного проекта из нескольких альтернативных, имеющих примерно одинаковые значения NPV (в частности, если два проекта имеют одинаковые значения NPV, но разные объемы требуемых инвестиций, то очевидно, что выгоднее тот из них, который обеспечивает большую эффективность вложений).

### *Пример 2.3.3*

По условиям примера 2.3.2 определите индекс рентабельности.

*Решение.* Представим решение задачи в виде таблицы в Microsoft Excel (рис. 2.3.3).

$$PI = 1,05 > 0.$$

| Книга1 |                               |        |                                                          |                         |
|--------|-------------------------------|--------|----------------------------------------------------------|-------------------------|
|        | A                             | B      | C                                                        | D                       |
| 2      | Наименование денежного потока | Год(ы) | Денежный поток                                           |                         |
| 3      | IC – стартовая инвестиция     |        | -5000                                                    | =C3+D3                  |
| 4      | Входной денежный поток        | 1      | 1800                                                     | =C4+D4                  |
| 5      |                               | 2      | 1800                                                     | =C5+D5                  |
| 6      |                               | 3      | 1800                                                     | =C6+D6                  |
| 7      |                               | 4      | 1800                                                     | -300 =C7+D7             |
| 8      |                               | 5      | 1800                                                     | =C8+D8                  |
| 9      | Показатель дисконта           | 0,2    | Общая накопленная величина дисконтированных доходов (PV) | =ЧПС(B9;E4;E5;E6;E7;E8) |
| 10     |                               |        | Индекс рентабельности                                    | =E9/D3*-1               |

Рис. 2.3.3. Расчет индекса рентабельности инвестиций

### Внутренняя норма доходности (прибыльности) инвестиций

По определению, внутренняя норма доходности (синонимы: внутренняя норма прибыли, внутренняя норма окупаемости; по-английски Internal Rate of Return, сокращенно IRR) — это такое значение показателя дисконта, при котором современное значение инвестиции равно современному значению потоков денежных средств за счет инвестиций, или значение показателя дисконта, при котором обеспечивается нулевое значение чистого настоящего значения инвестиционных вложений.

Экономический смысл внутренней нормы прибыльности состоит в том, что это такая норма доходности инвестиций, при которой предприятию одинаково эффективно инвестировать свой капитал под IRR процентов в какие-либо финансовые ин-

струменты или произвести реальные инвестиции, которые генерируют денежный поток, каждый элемент которого, в свою очередь, инвестируется по IRR процентов. Например, если проект полностью финансируется за счёт ссуды коммерческого банка, то значение IRR показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которого делает проект убыточным.

На практике любая организация финансирует свою деятельность, в том числе и инвестиционную, из различных источников. В качестве платы за пользование авансированными в деятельность организации финансовыми ресурсами она уплачивает проценты, дивиденды, вознаграждения и т.п., иными словами, несет некоторые обоснованные расходы на поддержание экономического потенциала. Показатель, характеризующий уровень этих расходов относительно долгосрочных источников средств, называется средневзвешенной ценой капитала (WACC — Weight Average Cost of Capital). Этот показатель отражает сложившийся в организации минимум возврата на вложенный в ее деятельность капитал, его рентабельность и рассчитывается по формуле средней арифметической взвешенной:

$$WACC = \sum_{i=1}^n S_i \cdot d_i, \quad (2.3.5)$$

где  $s$  — цена источника средств;

$d$  — удельный вес источника средств.

Таким образом, экономический смысл критерия IRR заключается в следующем: организации выгодно принимать любые решения инвестиционного характера, внутренние нормы доходности которых не больше текущего значения показателя «цена капитала» CC. Под показателем CC понимается либо WACC, если источник средств точно не идентифицирован, либо цена целевого источника, если таковой имеется. Именно с показателем CC сравнивается критерий IRR, рассчитанный для конкретного проекта

Математическое определение внутренней нормы прибыльности предполагает решение следующего уравнения:

$$\sum_{k=1}^n \frac{Cf_k}{(1 + IRR)^k} = IC, \quad (2.3.6)$$

где  $Cf_k$  — входной денежный поток в  $k$ -й период;

$IC$  — значение инвестиции.

Решая это уравнение, находим значение  $IRR$ . Схема принятия решения на основе метода внутренней нормы прибыльности имеет вид:

- если значение  $IRR$  выше или равно  $CC$ , то проект принимается,
- если значение  $IRR$  меньше  $CC$ , то проект отклоняется.

Таким образом,  $IRR$  является как бы «барьерным показателем»: если стоимость капитала выше значения  $IRR$ , то «мощности» проекта недостаточно, чтобы обеспечить необходимый возврат и отдачу денег, следовательно, проект следует отклонить.

Метод внутренней нормы доходности определяет ее процентную ставку, отношение, а не абсолютную величину, затем осуществляется сравнение полученной ставки со ставкой окупаемости, уже учитывающей риски проекта. Если рассчитанная окупаемость превышает аналогичный показатель с учетом рисков, то инвестиции можно считать обоснованными. Если нет, увы, проект подлежит отклонению.

Практическое применение данного метода осложнено, если в распоряжении аналитика нет специализированного финансового калькулятора. В этом случае применяется метод последовательных итераций с использованием табулированных значений дисконтирующих множителей. Для этого с помощью таблиц выбираются два значения коэффициента дисконтирования  $r_1 < r_2$  таким образом, чтобы в интервале  $(r_1, r_2)$  функция  $NPV$  меняла свой знак. Далее используют формулу:

$$IRR = i_1 + NPV(i_1) / [NPV(i_1) - NPV(i_2)] \cdot (i_2 - i_1). \quad (2.3.7)$$

Точность вычислений обратно пропорциональна длине интервала  $(r_1, r_2)$ , а наилучшая аппроксимация с использованием табулированных значений достигается в случае, когда длина интервала минимальна (равна 1%).

#### Пример 2.3.4

Рассчитать внутреннюю ставку доходности по проекту, где затраты составляют 1200 тыс. руб., а доходы 50; 200; 450; 500 и 600 тыс. руб.

*Решение.* Произведем расчет по ставке 5%:

$$NPV = 47619 + 181406 + 388767 + 411351 + 470116 - 1200000 = 299259.$$

Поскольку  $NPV > 0$ , то новая ставка дисконтирования должна быть больше 5%.

Расчет по ставке 15%:

$$NPV = 43478 + 151229 + 295882 + 285877 + 298306 - 1200000 = -125228.$$

Вычисляем внутреннюю ставку доходности:

$$IRR = 5 + [299259 / [299259 - (-125228)]] \cdot (15 - 5) = 12,05.$$

Внутренняя норма доходности проекта равна 12,05%.

Существуют более точные методы определения  $IRR$ , которые предполагают использование специального финансового калькулятора или электронного процессора EXCEL.

Для нахождения внутренней нормы доходности инвестиции воспользуемся финансовой функцией Microsoft Excel **ВСД**, которая возвращает внутреннюю ставку доходности для ряда потоков денежных средств, представленных их численными значениями. Эти денежные потоки не обязательно должны быть равными по величине, как в случае аннуитета. Однако они должны иметь место через равные промежутки времени, например, ежемесячно или ежегодно. Внутренняя ставка доходности — это процентная ставка, принимаемая для инвестиции, состоящей из платежей (отрицательные величины) и доходов (положительные величины), которые осуществляются в последовательные и одинаковые по продолжительности периоды.

Синтаксис: **ВСД**(значения;предположение),

где *значения* — это массив или ссылка на ячейки, содержащие числа, для которых требуется подсчитать внутреннюю ставку доходности. Значения должны содержать по крайней мере одно положительное и одно отрицательное значения. **ВСД** использует порядок значений для интерпретации порядка денежных выплат или поступлений. Убедитесь, что

значения выплат и поступлений введены в правильном порядке;

*предположение* — это величина, о которой предполагается, что она близка к результату ВСД. Microsoft Excel использует метод итераций для вычисления ВСД. Начиная со значения «предположение», функция ВСД выполняет циклические вычисления, пока не получит результат с точностью 0,00001%. Если функция ВСД не может получить результат после 20 попыток, то выдается значение ошибки #ЧИСЛО!. В большинстве случаев нет необходимости задавать предположение для вычислений с помощью функции ВСД. Если предположение опущено, то оно полагается равным 0,1 (10%). Если ВСД возвращает значение ошибки #ЧИСЛО! или если результат далек от ожидаемого, можно попытаться выполнить вычисления еще раз с другим значением аргумента «предположение».

Функция ВСД тесно связана с функцией ЧПС. Ставка доходности, вычисляемая ВСД, связана с нулевой чистой текущей стоимостью. Взаимосвязь функций ЧПС и ВСД отражена в следующей формуле:

$$\text{ЧПС}(\text{ВСД}(\text{В1:В6}); \text{В1:В6}) = 3.60\text{E-}08.$$

Учитывая точность расчета для функции ВСД, значение 3,60E-08 можно считать 0 (нулевым).

Рассчитаем внутреннюю норму доходности с использованием финансовой функции ВСД.

### Пример 2.3.5

На покупку машины требуется 16950\$. Машина в течение 10 лет будет экономить ежегодно 3000\$. Остаточная стоимость машины равна нулю. Найти IRR.

*Решение.* Представим решение задачи в виде таблицы Microsoft Excel (рис. 2.3.4).

В результате вычислений получим  $\text{IRR}=12\%$ .

Многие специалисты считают метод внутренней нормы доходности наиболее удачным из всех финансовых методов. Являясь качественным показателем, по сути, пропорцией, он спосо-

|    | А                           | В      | С              |
|----|-----------------------------|--------|----------------|
| 1  |                             | Годы   | Денежный поток |
| 2  | Исходное инвестирование     | Сейчас | -16950         |
| 3  | Годовая экономия            | 1      | 3000           |
| 4  |                             | 2      | 3000           |
| 5  |                             | 3      | 3000           |
| 6  |                             | 4      | 3000           |
| 7  |                             | 5      | 3000           |
| 8  |                             | 6      | 3000           |
| 9  |                             | 7      | 3000           |
| 10 |                             | 8      | 3000           |
| 11 |                             | 9      | 3000           |
| 12 |                             | 10     | 3000           |
| 13 | Внутренняя норма доходности |        | =ВСД(С2:С12)   |
| 14 |                             |        |                |
| 15 |                             |        |                |

Рис. 2.3.4. Нахождение внутренней нормы доходности

бен дать более точное представление о предпочтительности того или иного проекта, особенно в условиях, когда проекты существенно отличаются друг от друга.

Недостатки данного метода заключаются в его относительной расчетной сложности и носят обычно технический характер. Например, иногда вычисления дают отрицательный результат либо неразрешимые условия, что является, как правило, последствием особенностей вычислений.

Как мы видим, недостатки метода чистого приведенного дохода являются достоинствами метода внутренней нормы доходности, и наоборот. Логично сделать вывод о предпочтительности использования обоих методов при оценке экономической эффективности инвестиций с последующим принятием управленческих решений на основании результатов анализа по обоим методам. К сожалению, NPV и IRR методы могут конфликтовать друг с другом. Рассмотрим это явление на конкретном примере.

*Пример 2.3.6. (Сравнение NPV и IRR методов)*

Произведем оценку сравнительной эффективности двух проектов с одинаковыми исходными инвестициями, но с различными входными денежными потоками. Исходные данные для расчета эффективности помещены в табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

ДЕНЕЖНЫЕ ПОТОКИ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПРОЕКТОВ

| Год | Проект А | Проект В |
|-----|----------|----------|
| 0   | –1000    | –1000    |
| 1   | 500      | 100      |
| 2   | 400      | 300      |
| 3   | 300      | 400      |
| 4   | 100      | 600      |

*Решение.* Для дальнейшего анализа используем так называемый NPV-профиль, который по определению представляет собой зависимость показателя NPV от стоимости капитала проекта.

Рассчитаем NPV для различных значений стоимости капитала. Результаты расчетов представим в табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3

ПОКАЗАТЕЛИ NPV ДЛЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПРОЕКТОВ

| $r$ (%) | Проект А | Проект В |
|---------|----------|----------|
| 0       | 300      | 400      |
| 5       | 180,42   | 206,50   |
| 10      | 78,82    | 49,18    |
| 15      | –8,33    | –80,14   |

Графики NPV-профилей для проектов будут иметь вид, представленный на рис. 2.3.5.



Рис. 2.3.5. NPV-профили альтернативных проектов

Решив уравнения, определяющие внутреннюю норму доходности, получим:

- для проекта А  $IRR = 14,49\%$ ,
- для проекта В  $IRR = 11,79\%$ .

Таким образом, по критерию внутренней нормы доходности предпочтение следует отдать проекту А, как имеющему большее значение IRR. В то же время NPV-метод неоднозначно дает вывод в пользу проекта А.

Проанализировав соотношение NPV-профилей, которые имеют пересечение в точке  $r^*$ , составляющей в данном случае значение 7,2%, приходим к следующему выводу:

- если  $r > r^*$ , оба метода дают одинаковый результат,
- если  $r < r^*$ , методы конфликтуют — NPV-метод принимает проект В, IRR-метод принимает проект А.

Следует отметить, что этот конфликт имеет место только при анализе взаимоисключающих друг друга проектов. Для отдельно взятых проектов оба метода дают один и тот же результат, положительное значение NPV *всегда* соответствует ситуации, когда внутренняя норма доходности превышает стоимость капитала.

### Модифицированная внутренняя норма доходности (MIRR)

Используют в том случае, когда по инвестиционному проекту невозможно рассчитать единственный внутренний уровень доходности, т.е. возникает эффект множественности IRR.

Модифицированная внутренняя норма доходности вычисляется по формуле:

$$\sum_{i=0}^n \frac{OF_i}{(1+r)^i} = \frac{\sum_{i=0}^n IF_i \cdot (1+r)^{n-i}}{(1+MIRR)^n}, \quad (2.3.8)$$

где  $OF_i$  — отток денежных средств в  $i$ -м периоде;

$IF_i$  — приток денежных средств в  $i$ -м периоде;

$r$  — цена источника финансирования данного проекта;

$n$  — продолжительность проекта.

### Срок окупаемости (PP), дисконтированный срок окупаемости (DPP)

Метод определения срока возврата инвестиций — наиболее простой, но одновременно и самый поверхностный из всех рассматриваемых нами финансовых методов. Уже из названия можно понять, что в рамках данного метода производится расчет срока, в течение которого должны окупиться первоначальные инвестиции. Предполагается, что после этого проект приносит только прибыль. Очевидно, это верно не для всех проектов. Потому понятие «срок окупаемости» применяют к тем проектам, в которых за единовременным вложением средств следует ежегодное получение прибыли.

Простейший (и наименее обоснованный) способ расчета срока окупаемости состоит в делении объема вложений на ожидаемый ежегодный доход. Тогда срок окупаемости равен

$$PP = \min n,$$

$$\text{при котором } \sum_{k=1}^n P_k \geq IC, \quad (2.3.9)$$

где  $P_k$  — ожидаемый доход в  $k$ -й период;

$IC$  — объем вложений.

Некоторые специалисты при расчете срока окупаемости инвестиции рекомендуют учитывать временной аспект. В этом случае в расчет принимаются денежные потоки, дисконтированные по показателю WACC, а соответствующая формула для расчета дисконтированного срока окупаемости,  $DPP$  имеет вид:

$$PP = \min n,$$

$$\text{при котором } \sum_{k=1}^n P_k \cdot \frac{1}{(1+r)^k} \geq IC. \quad (2.3.10)$$

Очевидно, что в случае дисконтирования срок окупаемости увеличивается, т.е. всегда  $DPP < PP$ .

Необходимо отметить, что в оценке инвестиционных проектов критерии  $DPP$  и  $PP$  могут использоваться двояко: а) проект принимается, если окупаемость имеет место; б) проект принимается только в том случае, если срок окупаемости не превышает установленного в компании некоторого лимита.

### Пример 2.3.7

Пусть оба проекта предполагают одинаковый объем инвестиций \$1000 и рассчитаны на четыре года.

Проект А генерирует следующие денежные потоки: по годам 500, 400, 300, 100, а проект В: 100, 300, 400, 600. Стоимость капитала проекта оценена на уровне 10%.

**Решение.** Расчет дисконтированного срока осуществляется с помощью следующих таблиц.

Таблица 2.3.4

| Год                              | 0     | 1    | 2    | 3   | 4   |
|----------------------------------|-------|------|------|-----|-----|
| Чистый денежный поток (ЧДП)      | −1000 | 500  | 400  | 300 | 100 |
| Дисконтированный ЧДП             | −1000 | 455  | 331  | 225 | 68  |
| Накопленный дисконтированный ЧДП | −1000 | −545 | −214 | 11  | 79  |

Во второй строке таблицы помещены дисконтированные значения денежных доходов предприятия вследствие реализации инвестиционного проекта. В данном случае уместно рассмотреть следующую интерпретацию дисконтирования: приведение денежной суммы к настоящему моменту времени соответствует выделению из этой суммы той ее части, которая соответствует доходу инвестора, который предоставляется ему за то, что он предоставил свой капитал. Таким образом, оставшаяся часть денежного потока призвана покрыть исходный объем инвестиции.

В третьей строке таблицы содержатся значения непокрытой части исходной инвестиции. С течением времени величина непокрытой части уменьшается. Так, к концу второго года непокрытыми остаются только \$214, и поскольку дисконтированное значение денежного потока в третьем году составляет \$225, становится ясным, что период покрытия инвестиции составляет два полных года и какую-то часть года. Более конкретно для проекта получим:

$$DPP_a = 2 + \frac{214}{225} = 2,95.$$

Аналогично для второго проекта расчетная таблица и расчет дисконтированного периода окупаемости имеют следующий вид.

Таблица 2.3.5

| Год                              | 0     | 1    | 2    | 3    | 4   |
|----------------------------------|-------|------|------|------|-----|
| Чистый денежный поток (ЧДП)      | –1000 | 100  | 300  | 400  | 600 |
| Дисконтированный ЧДП             | –1000 | 91   | 248  | 301  | 410 |
| Накопленный дисконтированный ЧДП | –1000 | –909 | –661 | –360 | 50  |

$$DPP_b = 3 + \frac{360}{410} = 3,88.$$

На основе результатов расчетов делается вывод о том, что проект А лучше, поскольку он имеет меньший дисконтированный период окупаемости.

При всей кажущейся простоте метод не лишен объективностью. Для примера можно рассмотреть применение данного метода в сфере инвестиций в информационные технологии. «В наше время развитие информационных технологий идет весьма быстрыми темпами, что обуславливает создание все новых и новых инструментов и методик, направленных на поддержание бизнеса со стороны ИТ. Как правило, с появлением очередного новшества предыдущие версии уже считаются устаревшими, как не обеспечивающие конкурентных преимуществ бизнесу. Именно с учетом этого топ-менеджеры многих компаний и ставят во главу угла срок окупаемости инвестиций в информационные технологии» [31].

К минусам данного способа можно отнести, кроме того, отсутствие разделения окупаемости на долгосрочную и краткосрочную, т. е. метод учитывает только начальные денежные потоки, именно те потоки, которые укладываются в период окупаемости. Все последующие денежные потоки не принимаются во внимание в расчетной схеме. Так, если бы в примере 2.3.7 во втором проекте в последний год поток составил, например \$1000, то результат расчета дисконтированного периода окупаемости не изменился бы, хотя совершенно очевидно, что проект стал бы в этом случае гораздо более привлекательным.

Таким образом, целесообразно применять этот метод в совокупности с методами приведенного дохода и внутренней нормы доходности.

### *Коэффициент эффективности инвестиций*

Коэффициент эффективности инвестиций, называемый также учетной нормой прибыли (ARR), имеет две характерные черты: во-первых, он не предполагает дисконтирования показателей дохода; во-вторых, доход характеризуется показателем чистой прибыли РН (прибыль за минусом отчислений в бюджет). Алгоритм расчета исключительно прост, что и предопределяет широкое использование этого показателя на практике.

Коэффициент эффективности инвестиции рассчитывается делением среднегодовой прибыли  $PN$  на среднюю величину инвестиций (коэффициент берется в процентах). Средняя величина инвестиций находится делением исходной суммы капитальных вложений на два, если предполагается, что по истечении срока реализации анализируемого проекта все капитальные затраты будут списаны.

Если допускается наличие остаточной, или ликвидационной, стоимости ( $RV$ ), то ее оценка должна быть учтена в расчетах.

$$ARR = \frac{PN}{1/2 \cdot (IC - RV)}, \quad (2.3.11)$$

где  $PN$  — среднегодовая прибыль (прибыль за минусом отчислений в бюджет);

$IC$  — исходная сумма капитальных вложений;

$RV$  — ликвидационная стоимость.

Данный показатель чаще всего сравнивается с коэффициентом рентабельности авансированного капитала, рассчитываемого делением общей чистой прибыли организации на общую сумму средств, авансированных в ее деятельность (итог среднего баланса-нетто).

Метод, основанный на коэффициенте эффективности инвестиции, также имеет ряд существенных недостатков, обусловленных тем, что он не учитывает временной компоненты денежных потоков. В частности, метод не делает различия между проектами с одинаковой суммой среднегодовой прибыли, но варьирующей суммой прибыли по годам, а также между проектами, имеющими одинаковую среднегодовую прибыль, но генерируемую в течение различного количества лет, и т.п.

Критерии (показатели, характеристики финансовых потоков) используются для оценки и сравнения инвестиционных проектов, выбора из них наиболее предпочтительных для инвестора. Поскольку рассмотренные показатели (критерии, характеристики финансовых потоков) относятся к различным моментам времени, ключевой проблемой здесь является их сопоставимость между собой. Относиться к результатам сопоставления тех или иных критериев можно по-разному в зависи-

мости от существующих объективных и субъективных условий: темпа инфляции, размера инвестиций и генерируемых поступлений, горизонта прогнозирования, уровня квалификации аналитика и т.п.

Существуют инвестиционные проекты, в которых трудно или невозможно вычислить денежный доход. Подобного рода проекты возникают на предприятии, когда оно собирается модифицировать технологическое или транспортное оборудование, которое принимает участие во многих разноплановых технологических циклах и невозможно оценить результирующий денежный поток. В этом случае в качестве критерия для принятия решения о целесообразности инвестиций выступает стоимость эксплуатации.

### *Влияние инфляции на оценку эффективности инвестиций*

Анализ влияния инфляции может быть произведен для двух вариантов:

- темп инфляции различный по отдельным составляющим ресурсов (входных и выходных),
- темп инфляции одинаковый для различных составляющих затрат и издержек.

**В рамках первого подхода**, который в большей степени отвечает реальной ситуации, особенно в странах с нестабильной экономикой, метод чистого современного значения используется в своей стандартной форме, но все составляющие расходов и доходов, а также показатели дисконта корректируются в соответствии с ожидаемым темпом инфляции по годам. Важно отметить, что произвести состоятельный прогноз различных темпов инфляции для различных типов ресурсов представляется чрезвычайно трудной и практически неосуществимой задачей.

**В рамках второго подхода** влияние инфляции носит своеобразный характер: инфляция влияет на числа (промежуточные значения), получаемые в расчетах, но не влияет на конечный результат и вывод относительно судьбы проекта.

При принятии окончательного решения о целесообразности инвестирования, помимо рассмотренных показателей, учитываются также такие факторы, как общественная значимость про-

екта, степень его соответствия стратегии развития фирмы, рыночный потенциал производимого продукта, инвестиционные риски, экологическая безопасность и т.д.

### ✍ Пример 2.3.8

Компания планирует приобрести новое оборудование по цене \$36 000, которое обеспечивает \$20 000 экономии затрат (в виде входного денежного потока) в год в течение трех ближайших лет. За этот период оборудование подвергнется полному износу. Стоимость капитала предприятия составляет 16%, а ожидаемый темп инфляции — 10% в год.

**Решение.** Сначала оценим проект без учета инфляции (табл. 2.3.6).

Таблица 2.3.6

|                             | Год    | Сумма денег | 16%-ный множитель | Современное значение, \$ |
|-----------------------------|--------|-------------|-------------------|--------------------------|
| Исходная инвестиция         | Сейчас | –36000      | 1                 | –36000                   |
| Годовая экономия            | (1–3)  | 20000       | 2,246             | 44920                    |
| Чистое современное значение |        |             |                   | 8920                     |

Из расчетов очевиден вывод: проект следует принять, отмечая высокий запас прочности.

Теперь учтем в расчетной схеме эффект инфляции. Прежде всего необходимо учесть влияние инфляции на требуемое значение показателя отдачи. Для этого вспомним следующие простые рассуждения. Пусть предприятие планирует реальную прибыльность своих вложений в соответствии с процентной ставкой 16%. Это означает, что при инвестировании \$36 000 через год оно должно получить  $36000 \cdot (1 + 0.16) = 41760$ . Если темп инфляции составляет 10%, то необходимо скорректировать эту сумму в соответствии с темпом:  $41760 \cdot (1 + 0.10) = 45936$ . Общий расчет может быть записан следующим образом:  $36000 \cdot (1 + 0.16) \cdot (1 + 0.10) = 45936$ .

В общем случае, если  $r_p$  — реальная процентная ставка прибыльности, а  $h$  — темп инфляции, то номинальная (контракт-

ная) норма прибыльности запишется с помощью формулы Фишера (1.7.12):

$$r_p = r + h + r \cdot h.$$

Для рассматриваемого примера расчет приведенного показателя стоимости капитала имеет вид:

|                                |        |
|--------------------------------|--------|
| реальная стоимость капитала    | 16%;   |
| темп инфляции                  | 10%;   |
| смешанный эффект (10% от 16%)  | 1,6%;  |
| приведенная стоимость капитала | 27,6%. |

Рассчитаем величину критерия NPV с учетом инфляции, т.е. пересчитаем все денежные потоки и продисконтируем их с показателем дисконта 27,6% (см. таблицу 2.3.7).

Таблица 2.3.7

|                             | Год    | Сумма денег | Индекс цен | Привед. денежн. поток | 27,6% множит. | Наст. значен. |
|-----------------------------|--------|-------------|------------|-----------------------|---------------|---------------|
| Исходная инвестиция         | Сейчас | –36000      | –          | –36000                | 1,000         | –36,000       |
|                             | 1      | 20000       | 1,10       | 22000                 | 0,7837        | 17241         |
|                             | 2      | 20000       | 1,21       | 24200                 | 0,6142        | 14864         |
|                             | 3      | 20000       | 1,331      | 26620                 | 0,4814        | 12815         |
| Чистое современное значение |        |             |            |                       |               | 8920          |

Ответы обоих решений в точности совпадают.

По этой причине большая часть фирм западных стран не учитывает инфляцию при расчете эффективности капитальных вложений.

### Тесты для проверки усвоения пройденного материала

1. В чем заключается временная ценность денег? (Возможно несколько правильных вариантов ответа):
  - А. деньги обесцениваются со временем
  - В. деньги приносят доход
  - С. равные по абсолютной величине денежные суммы, относящиеся к различным моментам времени, оцениваются по-разному
  - Д. «сегодняшние деньги ценнее завтрашних денег»
2. По какой формуле определяется процентная ставка?
  - А.  $r = \frac{FV - PV}{PV}$
  - В.  $r = \frac{FV - PV}{FV}$
  - С.  $r = \frac{FV}{PV}$
  - Д.  $r = \frac{PV}{FV}$
3. Нарращение — это:
  - А. процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов
  - В. базисный темп роста
  - С. отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга
  - Д. движение денежного потока от настоящего к будущему
4. Предприятие получило кредит на один год в размере 40 тыс. руб. с условием возврата 50 тыс. руб. Определите процентную ставку.
  - А. 25%
  - В. 20%
  - С. 1,25%
5. Сумма в размере 2000 рублей дана в долг на 2 года по схеме простого процента под 10% годовых. Определить сумму, подлежащую возврату.

- А. 2400 руб.
  - В. 400 руб.
  - С. 2800 руб.
  - Д. 2420 руб.
6. В каких единицах выражается ставка?
    - А. в процентах;
    - В. в процентах или в десятичных дробях;
    - С. в десятичных дробях.
  7. Отношение суммы наращенного капитала к сумме первоначального капитала — это:
    - А. дисконт-фактор
    - В. ставка
    - С. индекс роста капитала
  8. Отношение суммы первоначального капитала к сумме наращенного капитала — это:
    - А. дисконт-фактор
    - В. процентная ставка
    - С. индекс роста капитала
  9. В качестве ставки дисконтирования и наращения может выступать:
    - А. процентная ставка
    - В. как процентная, так и учетная ставка
    - С. учетная ставка
  10. Проценты по отношению к наращенному числу называются...
    - А. процентами «на 100»
    - В. процентами «во 100»
    - С. процентами «со 100»
  11. Проценты по отношению к уменьшенному числу называются...
    - А. процентами «во 100»
    - В. процентами «на 100»
    - С. процентами «со 100»
  12. Выберите правильное утверждение:
    - А. точные и обыкновенные проценты определяются исходя из точного числа дней (365 или 366)
    - В. обыкновенные проценты определяются исходя из приближенного числа дней (365 или 366)

- С. точные проценты определяются исходя из точного числа дней (365 или 366), а обыкновенные из приближенного числа — 360
13. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаются как
- 365/365
  - 365/360
  - 360/360
14. Точный процент с точным числом дней, обозначается как
- 360/360
  - 365/365
  - 365/360
15. При точном и приближенном подсчете числа дней срока ссуды день ее выдачи и возврата считают за...
- 1,5 дня
  - 2 дня
  - 1 день
16. В финансовых расчетах используются следующие виды процентных ставок:
- в зависимости от базы для начисления процентов различают простые (постоянная база) и сложные проценты (переменная база)
  - в зависимости от базы для начисления процентов по принципу расчета различают ставку наращенная — декурсивную ставку и учетную ставку — антисипативную ставку
  - в зависимости от базы для начисления процентов различают по постоянству значения процентной ставки в течение действия контракта — фиксированные и плавающие (фиксируется ли изменяющаяся во времени база и размер надбавки надбавки к ней — маржи)
  - все вышеперечисленные
17. По какой формуле определяется учетная ставка?
- $d = \frac{FV - PV}{PV}$

$$\text{В. } d = \frac{FV - PV}{FV}$$

$$\text{С. } d = \frac{FV}{PV}$$

$$\text{D. } d = \frac{PV}{FV}$$

18. Предприятие получило кредит на один год в размере 40 тыс. руб. с условием возврата 50 тыс. руб. Определите учетную ставку.
- 25%
  - 20%
  - 1,25%
19. Дисконтирование — это:
- процесс начисления и удержания процентов вперед
  - определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину
  - разность между наращенной и первоначальной суммами
20. Дисконтирование по простой учетной ставке осуществляется по формуле:
- $PV = FV(1 - d)n$
  - $PV = FV(1 - d) - n$
  - $PV = FV(1 - nd)$
  - $PV = FV(1 + nd) - 1$
21. Чем меньше процентная ставка, тем
- выше современная величина
  - ниже современная величина
  - на современную величину это не оказывает влияния
22. Какой вид дисконтирования выгоднее для векселедержателя?
- математическое дисконтирование
  - банковский учет
  - разница отсутствует

23. Ссуда предоставлена с 14 февраля одного года до 13 февраля следующего, год невисокосный. Определите, при каком способе расчета суммы к погашению получится меньшее значение:
- А. обыкновенные проценты и точное число дней ссуды
  - В. обыкновенные проценты и приближенное число дней ссуды
  - С. точные проценты и точное число дней ссуды
  - Д. во всех случаях сумма одинакова
24. Вставьте пропущенное.
- При ... решается задача нахождения такой величины капитала (называемой приведенной стоимостью), которая через заданное время при наращении простыми процентами по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через это заданное время.
- А. математическом дисконтировании
  - В. банковском дисконтировании (учете)
25. Сложные проценты широко применяются:
- А. в долгосрочных финансовых операциях, со сроком проведения более одного года
  - В. в краткосрочных финансовых операциях, если это предусмотрено условиями сделки
  - С. в краткосрочных финансовых операциях, если это вызвано объективной необходимостью (например, высоким уровнем инфляции, риска и т.д.)
  - Д. 1, 2 и 3
26. Предприниматель может получить ссуду:
- А. на условиях ежемесячного начисления сложных процентов из расчета 32% годовых
  - В. на условиях ежеквартального начисления сложных процентов из расчета 34% годовых
- Какой вариант более предпочтителен для предпринимателя?
- А. первый
  - В. второй
  - С. одинаковы
  - Д. это зависит от величины кредита

27. Вставьте пропущенное.
- При ... проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка  $d$ .
- А. математическом дисконтировании
  - В. банковском дисконтировании (учете)
28. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 1 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 30%, период наращения 30 дней. Какая ставка выгоднее?
- А. простая
  - В. сложная
  - С. одинаково
29. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 1 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 30%, период наращения 90 дней. Какая ставка выгоднее?
- А. простая
  - В. сложная
  - С. одинаково
30. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 1 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 30%, период наращения 1 год. Какая ставка выгоднее?
- А. простая
  - В. сложная
  - С. одинаково
31. Какое из определений неверное?
- А. Обменный курс показывает, сколько единиц отечественной валюты можно получить в обмен на единицу иностранной, т.е. это цена иностранной валюты, выраженная в единицах отечественной валюты
  - В. Девизный курс, являясь обратной величиной к обменному, показывает, сколько единиц иностранной валюты

- можно получить за единицу отечественной, т.е. это цена отечественной валюты, выраженная в единицах иностранной валюты
- С. Кросс-курс валют представляет собой соотношение между двумя валютами, следующие из их курсов по отношению к некоторой третьей валюте
- Д. Все верны
32. При инфляции различают следующие виды процентных ставок: номинальная и реальная процентная ставка. Номинальная процентная ставка —
- А. это исходная базовая (как правило, годовая) процентная ставка, указываемая в договорах
- В. показывает доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег
- С. это любая ставка, при которой будет происходить реальное увеличение стоимости капитала при данном индексе инфляции
33. При инфляции различают следующие виды процентных ставок: номинальная и реальная процентная ставка. Реальная процентная ставка —
- А. это исходная базовая (как правило, годовая) процентная ставка, указываемая в договорах
- В. показывает доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег
- С. это любая ставка, при которой будет происходить реальное увеличение стоимости капитала при данном индексе инфляции
34. Имеется возможность поместить денежные средства в долларах на 1,5 года в одном банке на валютном депозите под  $r = 16\%$  годовых с ежемесячным начислением сложных процентов или на рублевой депозит под  $r = 20\%$  годовых с полугодовым начислением сложных процентов. Как лучше поступить если курс покупки долларов на начало срока 19,1 руб., а ожидаемый курс продажи через 1,5 года — 22,8 руб.?
- А. поместить деньги на рублевый депозит

- В. поместить деньги на валютный депозит
- С. одинаково
- Д. никуда не вкладывать
35. Господин N собирается поместить на некоторый срок свободные денежные средства либо под сложную процентную ставку 30% годовых с ежеквартальным начислением процентов, либо под простую процентную ставку 48% годовых. Выясните, как выгоднее поступить при сроке 3 года.
- А. под простую процентную ставку 48%
- В. под сложную процентную ставку 30% годовых
- С. никуда не вкладывать
36. Вам предлагают сдать в аренду участок на шесть лет, выбрав один из двух вариантов оплаты аренды:
- а) 20 тыс. руб. — в конце каждого года
- б) 240 тыс. руб. — в конце шестилетнего периода
- Какой вариант более предпочтителен, если банк предлагает 30% годовых по вкладам?
- А. оба варианта одинаковы
- В. вариант а)
- С. вариант б)
37. Внутренняя норма доходности представляет собой
- А. ставку дисконтирования, обеспечивающую равенство чистой текущей стоимости нулю
- В. количество лет, необходимых для полного возмещения первоначальных затрат, т.е. определяется момент, когда денежный поток доходов сравнивается с суммой денежных потоков затрат
- С. определение степени влияния различных факторов на финансовый результат проекта
38. Дана следующая схема налога на проценты:
- А. 8% с части дохода от 0 до 5 тыс. руб.
- В. 12% с части дохода от 5 тыс. руб. до 20 тыс. руб.
- С. 16% с части дохода от 20 тыс. руб. до 40 тыс. руб.
- Д. 22% с части дохода от 40 тыс. руб. и выше
39. Предприниматель получил в качестве начисленных процентов сумму 41 тыс. руб. Какой налог он должен уплатить? (Ответ округлить до сотых.)

40. За три месяца стоимость потребительской корзины возросла с 634 руб. до 692 руб. Определите индекс потребительских цен за три месяца.
- 1,0915
  - 1,2356
  - 1,1196
  - 1,1578
41. Банк выдал долгосрочный кредит в размере 4 млн руб на 4 года по годовой ставке сложных процентов 40% годовых с условием, что он будет погашен единовременным платежом с процентами в конце срока. Определите погашаемую сумму и сумму полученных процентов.
- 15,37 и 11,37
  - 16,45 и 12,45
  - 13,34 и 9,34
  - 14,22 и 10,22
42. Коэффициент дисконтирования аннуитета необходим для определения
- приведенной стоимости
  - будущей стоимости
43. Дана формула  $Fq = P \cdot (1 + n \cdot r \cdot (1 - q))$  — это формула наращивания ...
- сложными процентами при начислении процентов несколько раз в год
  - простыми процентами с учетом уплаты налога
  - по смешанной схеме при начислении процентов несколько раз в год
  - наращения по простой учетной ставке с учетом уплаты налога
44. Первоначальная сумма вклада составляет 6 млн долл. США, процентная ставка — 4% годовых, срок хранения — 20 лет. Найдите конечную сумму денег по простым и сложным процентам. В ответ запишите разницу между данными величинами. (Ответ округлить до десятых.)
45. Конечная сумма составляет 6 млн долл. США, ставка 4%, срок хранения 20 лет. Определите первоначальную сумму:
- по схеме простых процентов;

б) сложных процентов.

Какая схема более выгодная для вкладчиков?

- а)
- б)

46. Предприниматель получил в банке ссуду в размере 50 тыс. руб. на 39 месяцев под процентную ставку 27% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Банк использует следующие схемы начисления процентов:

- схему сложных процентов;
- смешанную схему.

Какая схема начисления процентов более выгодна предпринимателю?

- а)
- б)

47. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 1 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 30%, периоды наращивания различны:

- 180 дней
- 10 лет

Выберите выгодную схему начисления процентов для каждого варианта:

- простые проценты
- сложные проценты
- простые проценты
- сложные проценты

48. В течение полугода каждые два месяца цены росли соответственно на 12%, 9% и 14%. Определите индекс и темп инфляции за полгода.

- 1,39 и 39%
- 1,58 и 58%
- 1,47 и 47%
- 1,39 и 139%

49. Вычислите D-дивизор если известно, что  $r = 0,25$ ,  $T = 360$ .

50. Выберите неправильные утверждения:

- Обыкновенные проценты с точным число дней обозначаются как 360/365.

- б) Дивизор — это произведение величины капитала на время в течение которого происходит наращение на капитал простых процентов.
  - в) Схема простых процентов предполагает неизменность величины, с которой происходит начисление.
  - г) Точные проценты определяют исходя из точного числа дней в году.
- А. в) и г)
  - В. б) и в)
  - С. а) и г)
  - Д. а) и б)
51. За вексель, учтенный за 5 лет по учетной ставке 14% годовых, заплачено 4 тыс. руб. Определите номинальную величину векселя. (Ответ округлить до сотых.)
52. Предприниматель получил 12 марта ссуду в банке по простой учетной ставке 22% годовых и должен возвратить 15 августа того же года 30 тыс. руб. Определите различными возможными способами сумму, полученную предпринимателем. Год невисокосный. При каком варианте расчета величина суммы, полученной предпринимателем, наибольшая?
- А. точные проценты и точное число дней
  - В. обыкновенные проценты и точное число дней ссуды
  - С. обыкновенные проценты и приближенное число дней ссуды
53. В банк предъявлен вексель на сумму 50 тыс. руб за полтора года до срока его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода — 30%, следующие полгода — 36%, затем каждый квартал повышается на 2%. Определите дисконт банка. (Результат вычислений округлить до сотых.)
54. Найдите учетную ставку, эквивалентную простой процентной ставке 30% годовых, при наращении капитала за год. Временные базы ставок одинаковы. (Результат вычисления округлить до сотых и представить в виде десятичной дроби.)

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная

1. *Ковалев В.В.* Методы оценки инвестиционных проектов. М.: Финансы и статистика, 2003.
2. *Ковалев В.В.* Сборник задач по финансовому анализу. М.: Финансы и статистика, 2003.
3. *Ковалев В.В.* Курс финансовых вычислений / В.В.Ковалев, В.А. Уланов. М.: Финансы и статистика, 2002.
4. *Лукашин Ю.П.* Финансовая математика: Учеб. пособие. М.: Изд. МЭСИ, 2005.
5. *Симчера В.М.* Введение в финансовые и актуарные вычисления. М.: Финансы и статистика, 2003.
6. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика: Учебник. М.: Дело, 2002.

### Дополнительная

7. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. М.: ИНФРА-М, 1998.
8. *Ващенко Т.В.* Математика финансового менеджмента. М.: Перспектива, 1996.
9. *Вебер М.* Коммерческие расчеты от А до Я. Формулы, примеры расчетов и практические советы: Пер. с нем. М.: Дело и Сервис, 1999.
10. *Ершов Ю.С.* Финансовая математика в вопросах и ответах: Учеб. пособие. Новосибирск: Сибирское соглашение, 1999.
11. *Капельян С.Н.* Основы коммерческих и финансовых расчетов / С.Н. Капельян, О.А. Левкович. Минск: НТЦ «АПИ», 1999.
12. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения: Учеб.-практ. пособие для вузов. М.: ПРИОР, 1999.
13. *Ковалев В.В.* Сборник задач по финансовому анализу: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2000.
14. *Ковалев В.В.* Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. М.: Финансы и статистика, 1999.

15. *Кочович Е.* Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Пер. с серб.; предисл. Е.М. Четыркина. М.: Финансы и статистика, 1994.
16. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики: Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. М.: Дело, 1998.
17. *Лукаевич И.Я.* Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998.
18. *Малыхин В.И.* Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.
19. *Медведев Г.А.* Начальный курс финансовой математики: Учеб. пособие. М.: Остожье, 2000.
20. *Радионов Н.В.* Основы финансового анализа: математические методы, системный подход / Н.В. Радионов, С.П. Радионова. СПб.: Альфа, 1999.
21. *Салин В.Н.* Техника финансово-экономических расчетов: Учеб. пособие / В.Н. Салин, О.Ю. Ситникова. М.: Финансы и статистика, 2000.
22. *Уланов В.А.* Сборник задач по курсу финансовых вычислений / Под ред. проф. В.В. Ковалева. М.: Финансы и статистика, 2000.
23. *Уотшем Т.Дж.* Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / Т. Дж. Уотшем, К. Паррамоу; пер. с англ.; под ред. М.Р. Ефимовой. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
24. *Фомин Г.П.* Финансовая математика: 300 примеров и задач: Учеб. пособие. М.: Гном-Пресс, 2000.
25. *Хелферт Э.* Техника финансового анализа / Пер. с англ.; под ред. Л.П. Белых. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1996.
26. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Дело Лтд, 1995.
27. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, BusinessРечь, 1992.
28. *Четыркин Е.М.* Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Дело, 1998.
29. *Четыркин Е.М.* Финансово-экономические расчеты / Е.М. Четыркин, Н.Е. Васильева. М.: Финансы и статистика, 1990.
30. *Четыркин Е.М.* Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Дело, 1998.
31. *Костюхин Д.* Методы оценки инвестиций в ИТ: блеск и нищета... / Д. Костюхин, А. Бордачев. — Режим доступа: <http://www.connect.ru/article.asp?id=5466>.
32. *Лукаевич И.Я.* Анализ операций с ценными бумагами с Microsoft Excel. — Режим доступа: <http://www.cfin.ru/finanalysis/inexcel/index.shtml>.
33. *Орлов А.И.* Инвестиционный менеджмент. — Режим доступа: <http://rbclub.ru/index.php?page=biz&art=1135>.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение А

#### Сводка основных формул

- Процентная ставка  $r_t = \frac{FV - PV}{PV}$ , (1)

где  $PV$  – предоставляемая в долг сумма,  
 $FV$  – возвращаемая сумма.

- Учетная ставка:  $d = \frac{FV - PV}{FV}$  (2)

- Соотношение между ставками:

$$r_t = \frac{d}{1-d_t} \quad \text{или} \quad d_t = \frac{r_t}{1+r_t} \quad (3)$$

- Дисконт-фактор:  $v = \frac{PV}{FV}$  (4)

- Индекс роста капитала:  $B_t = \frac{FV}{PV}$  (5)

- Формула вычисления процентов «со 100»:  $Q' = Q \cdot r$  (6)

- Формула вычисления процентов «на 100»:  $S' = \frac{S \cdot r}{1+r}$  (7)

- Формула вычисления процентов «во 100»:  $K' = \frac{K \cdot r}{1-r}$  (8)

- Формула наращение простыми процентами:  
 $FV = PV(1 + r \cdot n)$  (9)

- Формула простых процентов в случае нецелого числа лет:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{T} r\right) \quad (10)$$

Возможны три варианта начисления:

а) точный процент с точным числом дней, обозначаемый как **365/365** или **АСТ/АСТ**;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней, обозначаемые как **365/360** или **АСТ/360** ( $t$  – точное,  $T = 360$ );

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаемые как **360/360** ( $t$  – приближительное, считается, что в месяце 30 дней,  $T = 360$ ).

- Дивизор:  $D' = \frac{T}{r}$  (11)

- Формулы для вычисления процентного платежа (при использовании простой ставки):

а) если известна величина капитала ( $P$ ):  $I = P \cdot l \cdot r$ , (12)

б) если известна величина капитала, увеличенного на процентный платеж ( $P + I$ ):

$$I = \frac{(P + I)lr}{1 + lr} \quad \text{или} \quad I = \frac{(P + I)t}{D + t}; \quad (13)$$

в) если известна величина капитала, уменьшенного на процентный платеж ( $P - I$ ):

$$I = \frac{(P - I)lr}{1 - lr} \quad \text{или} \quad I = \frac{(P - I)t}{D - t}; \quad (14)$$

- Формула наращения простыми процентами по переменной процентной ставке:

$$F = P \left(1 + \sum_{k=1}^m n_k i_k\right), \quad (15)$$

где на период  $n_k$  установлена ставка  $i_k$  и таких периодов  $m$ .

- Формула определения простой процентной ставки, доставляющей при наращении такой же результат, как и несколько простых процентных ставок:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k i_k}{\sum_{k=1}^m n_k}, \quad (16)$$

где на период  $n_k$  установлена ставка  $i_k$  и таких периодов  $m$ .

- Формула определения величины начисленных процентов за пользование кредитом с учетом уменьшения долга с течением времени:

$$I = Pr \frac{kn + 1}{2k}, \quad (17)$$

где  $k$  — число погасительных платежей в год,  $n$  — срок кредита.

- Формула приведенной стоимости (при использовании простой ставки):

$$PV = \frac{FV}{1 + n \cdot r} \quad (18)$$

- Формула дисконтирования по простой учетной ставке:

$$PV = FV \cdot (1 - n \cdot d) \quad (19)$$

- Формула наращения по простой учетной ставке:

$$F = \frac{P}{1 - nd} \quad (20)$$

- Формула для определения срока ссуды (при использовании простой ставки):

$$n = \frac{F - P}{P \cdot r} \text{ или } t = \frac{F - P}{P \cdot r} \cdot T \quad (21)$$

$$n = \frac{F - P}{F \cdot d} \text{ или } t = \frac{F - P}{F \cdot d} \cdot T \quad (22)$$

- Формулы для определения простой ставки:

$$r = \frac{F - P}{P \cdot n} \text{ или } r = \frac{F - P}{P \cdot t} \cdot T \quad (23)$$

$$d = \frac{F - P}{F \cdot n} \text{ или } d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T \quad (24)$$

- Эквивалентность простых ставок:

$$r = \frac{d}{1 - nd}, \quad (25)$$

$$d = \frac{r}{1 + nr} \quad (26)$$

- Эквивалентность простых ставок при разных временных базах:

$$r = \frac{T_r \cdot d}{T_d - td}, \quad (27)$$

$$r = \frac{T_r \cdot d}{T_d - td}, \quad (28)$$

где  $T_r, T_d$  — временные базы, равные количеству дней в году при использовании соответственно процентной и учетной ставок.

- Формулы определения средних значений:

а) простой процентной ставки:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^m P_k i_k}{\sum_{k=1}^m P_k}, \quad (29)$$

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^m P_k n_k i_k}{\sum_{k=1}^m P_k n_k}, \quad (30)$$

б) срока:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m P_k n_k}{\sum_{k=1}^m P_k}, \quad (31)$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m P_k n_k i_k}{\sum_{k=1}^m P_k i_k}, \quad (32)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_m$  — простые процентные ставки, под которые взяты соответственно суммы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  на сроки где  $n_1, n_2, \dots, n_m$ .

- Формулы для определения средних значений:  
а) простой учетной ставки:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^m F_k d_k}{\sum_{k=1}^m F_k}, \quad (33)$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^m F_k n_k d_k}{\sum_{k=1}^m F_k n_k}, \quad (34)$$

б) срока:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m F_k n_k}{\sum_{k=1}^m F_k}, \quad (35)$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m P_k n_k d_k}{\sum_{k=1}^m P_k d_k}, \quad (36)$$

где  $d_1, d_2, \dots, d_m$  — простые учетные ставки, по которым соответственно суммы  $F_1, F_2, \dots, F_m$  учитываются за сроки где  $n_1, n_2, \dots, n_m$ .

- Формула наращенная простыми процентами с учетом уплаты налога:

$$F_q = P[1 + nr(1 - q)], \quad (37)$$

где  $q$  — ставка налога на проценты.

- Формула наращенная по простой учетной ставке с учетом уплаты налога:

$$F_q = \frac{P}{1 - nd}(1 - ndq), \quad (38)$$

где  $q$  — ставка налога на проценты.

- Индекс цен (индекс инфляции):

$$I'_p = \frac{P_2}{P_1}. \quad (39)$$

где  $P_1, P_2$  — стоимости потребительской корзины в начале и в конце периода длительностью  $t$ .

- Темп инфляции:

$$h_t = \frac{P_1 - P_2}{P_1}, \quad (40)$$

где  $P_1, P_2$  — стоимость потребительской корзины в начале и в конце периода длительностью  $t$ .

- Соотношение между индексом инфляции и темпом инфляции:

$$I_p^{(t)} = 1 + h_t \quad (41)$$

- Формула определения индекса инфляции за период при известных индексах инфляции за составляющие его подпериоды:

$$I_p^{(t)} = \prod_{i=1}^k I_p^{(t_i)} = \prod_{i=1}^k (1 + h_{t_i}), \quad (42)$$

где  $I_p^{(t_i)}, (h_{t_i})$  — индекс инфляции (темп инфляции) за подпериод  $t_i$  подпериоды расположены последовательно друг за другом и  $t = t_1 + t_2 + \dots + t_k$ .

- Формула наращенная простыми процентами учетом инфляции:

$$\bar{F} = \frac{P(1 + n \cdot r)}{I_p^{(n)}}, \quad (43)$$

где  $I_p^{(n)}$  — индекс инфляции за период  $n$ .

- Формулы определения простой годовой процентной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной ставке  $r$ :

$$\bar{r} = r + r \cdot h_n + \frac{h_n}{n}, \quad (44)$$

$$\bar{r} = \frac{(1 + nr) \cdot I_p^{(n)} - 1}{n}, \quad (45)$$

где  $h_n$  — темп инфляции за период  $n$ ,  
 $I_p^{(n)}$  — индекс инфляции за период  $n$ .

- Формула определения реальной годовой процентной ставки, при объявленной номинальной процентной ставке в условиях инфляции:

$$r_{real} = \frac{1}{n} \left( \frac{1 + nr}{I_p^{(n)}} - 1 \right). \quad (46)$$

- Формула определения простой годовой учетной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной ставке  $d$ :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1 - nd}{I_p^{(n)}} \right). \quad (47)$$

- Формула определения реальной годовой учетной ставки, при объявленной номинальной учетной ставке в условиях инфляции:

$$d_{real} = \frac{1 - (1 - nd) I_p^{(n)}}{n}. \quad (48)$$

- Формула для вычисления величины нового платежа при использовании простой процентной ставки:

$$P_0 = \begin{cases} P_1 (1 + (n_0 - n_1) r), & \text{если } n_0 > n_1 \\ P_1 & \text{если } n_0 = n_1 \\ \frac{P_1}{1 + (n_1 - n_0) r} & \text{если } n_0 < n_1 \end{cases} \quad (49)$$

где  $P_1$  и  $n_1$  — первоначальный платеж и срок его выплаты,  
 $n_0$  — срок выплаты нового платежа.

- Формула для вычисления срока нового платежа при использовании простой процентной ставки:

$$P_0 = \begin{cases} n_1 + \frac{1}{r} \left( \frac{P_0}{P_1} - 1 \right), & \text{если } P_0 > P_1 \\ n_1 & \text{если } P_0 = P_1 \\ n_1 - \frac{1}{r} \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 \right) & \text{если } \frac{P_1}{1 + n_1 r} \leq P_0 < P_1 \end{cases} \quad (50)$$

где  $P_1$  и  $n_1$  — первоначальный платеж и срок его выплаты,  
 $P_0$  — величина нового платежа.

- Формула определения срока консолидированного платежа при использовании простой процентной ставки:

$$n_0 = \frac{1}{r} \left( \frac{P_0}{\sum_{k=1}^m \frac{P_k}{1 + n_k r}} \right) - 1, \quad (51)$$

где платежи  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , уплачиваемые соответственно через время  $n_1, n_2, \dots, n_m$ , заменяются одним платежом  $P_0$ .

- Формула для вычисления величины нового платежа при использовании простой учетной ставки:

$$P_0 = \begin{cases} \frac{P_1}{1 - (n_0 - n_1) d}, & \text{если } n_0 > n_1 \\ P_1 & \text{если } n_0 = n_1 \\ P_1 (1 - (n_1 - n_0) d_0) & \text{если } n_0 < n_1 \end{cases} \quad (52)$$

где  $P_1$  и  $n_1$  — первоначальный платеж и срок его выплаты,  
 $n_0$  — срок выплаты нового платежа.

- Формула для вычисления срока нового платежа при использовании простой учетной ставки:

$$P_0 = \begin{cases} n_1 + \frac{1}{d} \left(1 - \frac{P_1}{P_0}\right), & \text{если } P_0 > P_1, \\ n_1 & \text{если } P_0 = P_1, \\ n_1 - \frac{1}{d} \left(1 - \frac{P_0}{P_1}\right) & \text{если } P(1 - n_1 d) \leq P_0 < P_1, \end{cases} \quad (53)$$

где  $P_1$  и  $n_1$  — первоначальный платеж и срок его выплаты,  $P_0$  — величина нового платежа.

- Формула определения срока консолидированного платежа при использовании простой учетной ставки:

$$n_0 = \frac{1}{d} \left( 1 - \frac{\sum_{k=1}^m P_k (1 - n_k d)}{P_0} \right), \quad (54)$$

где платежи  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , уплачиваемые соответственно через время  $n_1, n_2, \dots, n_m$ , заменяются одним платежом  $P_0$ .

- Формула наращения сложными процентами:

$$F_n = P \cdot (1 + r)^n = P \cdot FM1(r, n), \quad (55)$$

где  $n$  — число периодов начисления сложных процентов.

- Формула наращения сложными процентами по переменной процентной ставке:

$$F_n = P \prod_{k=1}^m (1 + i_k)^{n_k}, \quad (56)$$

где  $n_k$  — количество периодов начисления сложных процентов по процентной ставке  $i_k$ ,  $n$  — общий срок наращения.

- Формула наращения по смешанной схеме:

$$F_n = P(1 + r)^w (1 + fr), \quad (57)$$

где  $w$  — целое число периодов начисления сложных процентов,  $f$  — дробная часть периода,  $n = w + f$ .

- Формула наращения сложными процентами при начислении процентов несколько раз в год:

$$F_n = P \cdot \left( 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \right)^{mn}, \quad (58)$$

где  $n$  — число лет,  $m$  — количество начислений в год.

- Формула наращения по смешанной схеме при начислении процентов несколько раз в год:

$$F_n = P \left( 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \right)^{\bar{w}} \left( 1 + \bar{f} \frac{r^{(m)}}{m} \right), \quad (59)$$

где  $n$  — число лет,  $\bar{w}$  — целое число периодов начисления сложных процентов в  $n$  годах,  $\bar{f}$  — дробная часть периода,  $n = \frac{\bar{w} + \bar{f}}{m}$ .

- Формула определения срока ссуды (при использовании сложной процентной ставки):

$$n = \frac{\ln \frac{F_n}{P}}{m \ln \left( 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \right)}. \quad (60)$$

- Формулы для определения номинальной годовой процентной ставки:

$$r^{(m)} = m \left( \left( \frac{F_n}{P} \right)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right). \quad (61)$$

$$r^{(m)} = m [(1 + r_{ef})^{\frac{1}{m}} - 1]. \quad (62)$$

где  $r_{ef}$  — эффективная годовая процентная ставка.

- Формулы определения эффективной годовой процентной ставки:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m - 1, \quad (63)$$

$$r_{ef} = \left(\frac{F_n}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \quad (64)$$

- Формула приведенной стоимости (при использовании сложной ставки):

$$P = \frac{F_n}{(1+r)^n} = F_n \cdot FM2(r, n). \quad (65)$$

- Формула приведенной стоимости (при  $m$ -кратном начислении процентов в год):

$$P = \frac{F_n}{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}}. \quad (66)$$

- Формула дисконтирования по сложной учетной ставке:

$$PV = FV(1-d)^n, \quad (67)$$

где  $n$  — число периодов дисконтирования.

- Формула дисконтирования по смешанной схеме:

$$P = F_n (1-d)^w (1-fd), \quad (68)$$

где  $w$  — целое число периодов дисконтирования по сложной учетной ставке,  $f$  — дробная часть периода,  $n = w + f$ .

- Формула дисконтирования по сложной учетной ставке, осуществляемого несколько раз в год:

$$P = F_n \cdot \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \quad (69)$$

где  $n$  — число лет,  $m$  — количество осуществлении операции дисконтирования в год.

- Формула дисконтирования по смешанной схеме при дисконтировании несколько раз в год:

$$P = F_n \cdot \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{\bar{w}} \left(1 - \bar{f} \frac{d^{(m)}}{m}\right), \quad (70)$$

где  $n$  — число лет,  $\bar{w}$  — целое число периодов дисконтирования в  $n$  годах,  $\bar{f}$  — дробная часть периода,  $n = \frac{\bar{w} + \bar{f}}{m}$ .

- Формула для определения срока ссуды (при использовании сложной учетной ставки):

$$n = \frac{\ln \frac{P}{F_n}}{m \ln \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)}. \quad (71)$$

- Формулы для определения номинальной годовой учетной ставки:

$$d^{(m)} = m \left(1 - \left(\frac{P}{F_n}\right)^{\frac{1}{mn}}\right), \quad (72)$$

$$d^{(m)} = m [1 - (1 - d_{ef})^{\frac{1}{m}}], \quad (73)$$

где  $d_{ef}$  — эффективная годовая процентная ставка.

- Формулы определения эффективной учетной ставки:

$$d_{ef} = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m, \quad (74)$$

$$d_{ef} = 1 - \left(\frac{P}{F_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (75)$$

- Формула наращенения сложными процентами по учетной ставке:

$$F_n = \frac{P}{(1-d)^n}, \quad (76)$$

где  $n$  — число периодов начисления сложных процентов.

- Формула наращенения сложными процентами по учетной ставке при начислении процентов несколько раз в год:

$$F_n = \frac{P}{\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}, \quad (77)$$

где  $n$  — число лет,  $m$  — количество начислений в год.

- Формула наращенения непрерывными процентами:

$$F_n = P \cdot e^{\delta \cdot n}, \quad (78)$$

где  $\delta$  — сила роста.

- Формула для определения срока ссуды (при непрерывном начислении процентов):

$$n = \frac{\ln \frac{F_n}{P}}{\delta}. \quad (79)$$

- Формула для определения силы роста:

$$\delta = \frac{\ln \frac{F_n}{P}}{n}. \quad (80)$$

- Эквивалентность простых и сложных ставок:

$$r = \frac{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} - 1}{n}, \quad (81)$$

$$r^{(m)} = m(\sqrt[mn]{1 + nr} - 1), \quad (82)$$

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{n}, \quad (83)$$

$$d^{(m)} = m(1 - \sqrt[mn]{1 - nd}), \quad (84)$$

$$r = \frac{\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mn} - 1}{n}, \quad (85)$$

$$d^{(m)} = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[mn]{1 + nr}}\right), \quad (86)$$

$$d = \frac{1 - \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{n}, \quad (87)$$

$$r^{(m)} = m\left(\frac{1}{\sqrt[mn]{1 - nd}} - 1\right), \quad (88)$$

где  $r, d$  — простые ставки.

- Эквивалентность сложных ставок:

$$r^{(m)} = m\left[\left(1 + \frac{r^{(l)}}{l}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right], \quad (89)$$

$$d^{(m)} = m\left[1 - \left(1 - \frac{d^{(l)}}{l}\right)^{\frac{1}{m}}\right], \quad (90)$$

$$r^{(m)} = m\left[\left(1 - \frac{d^{(l)}}{l}\right)^{-\frac{1}{m}} - 1\right], \quad (91)$$

$$d^{(m)} = m\left[1 - \left(1 + \frac{r^{(l)}}{l}\right)^{-\frac{1}{m}}\right]. \quad (92)$$

- Эквивалентность силы роста и простых ставок:

$$r = \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{n}, \quad (93)$$

$$\delta = \frac{\ln(1 + nr)}{n}, \quad (94)$$

$$d = \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{n}, \quad (95)$$

$$\delta = -\frac{\ln(1 - nd)}{n}. \quad (96)$$

где  $r, d$  — простые ставки.

- Эквивалентность силы роста и сложных ставок:

$$\delta = m \ln \left( 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \right), \quad (97)$$

$$r^{(m)} = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1), \quad (98)$$

$$\delta = -m \ln \left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right), \quad (99)$$

$$d^{(m)} = m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}). \quad (100)$$

- Формулы наращения сложными процентами с учетом уплаты налога:

а) если налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока:

$$\hat{F}_n = P[a^n(1 - q) + q]; \quad (101)$$

б) если налог на полученные проценты выплачивается каждый год:

$$\hat{F}_n = P[a^n(1 - q) + q]; \quad (102)$$

где  $q$  — ставка налога на проценты,  $a$  — коэффициент наращения, равный либо  $\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$ , либо  $\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}$ , либо  $e^\delta$ .

- Формула для вычисления величины налога за каждый год при наращении сложными процентами, если налог на полученные проценты выплачивается каждый год:

$$Q^{(k)} = P(a - 1)[a - (a - 1)q]^{k-1}q, \quad (103)$$

где  $k$  — номер года, за который взимается налог.

- Формула наращения сложными или непрерывными процентами с учетом инфляции:

$$\bar{F}_n = \frac{Pa^n}{I_p^{(n)}}, \quad (104)$$

где  $I_p^{(n)}$  — индекс инфляции за период  $n$ ,  $a$  — равно либо  $\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$ , либо  $\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}$ , либо  $e^\delta$ .

- Формула определения номинальной годовой процентной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной номинальной годовой ставке  $r^{(m)}$ :

$$\bar{r}^m = m \left[ 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \sqrt[m]{I_p^{(n)}} - 1 \right]. \quad (105)$$

- Формула определения реальной номинальной годовой процентной ставки при объявленной исходной процентной ставке  $r^{(m)}$  в условиях инфляции:

$$r_{real}^{(m)} = m \left[ 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \frac{1}{\sqrt[m]{I_p^{(n)}}} - 1 \right]. \quad (106)$$

- Формула определения номинальной годовой учетной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной номинальной годовой ставке  $d^{(m)}$ .

$$\bar{d}^{(m)} = m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)^{\frac{1}{mn} \sqrt{I_p^{(n)}}} \right]. \quad (107)$$

- Формула определения реальной номинальной годовой учетной ставки при объявленной исходной учетной ставке  $d^{(m)}$  в условиях инфляции:

$$d_{real}^{(m)} = m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)^{\frac{1}{mn} \sqrt{I_p^{(n)}}} \right]. \quad (108)$$

- Формула определения силы роста, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной силе роста  $\delta$ :

$$\bar{\delta} = \delta + \frac{1}{n} \ln I_p^{(n)}. \quad (109)$$

- Формула определения реальной силы роста при объявленной исходной силе роста в условиях инфляции:

$$\delta_{real} = \delta - \frac{1}{n} \ln I_p^{(n)}. \quad (110)$$

- Формула Фишера:

$$\bar{r} = r + h + rh, \quad (111)$$

где  $h$  — годовой темп инфляции.

- Формула для вычисления величины нового платежа при использовании сложных ставок:

$$P_0 = P_1 a^{n_0 - n_1}, \quad (112)$$

где  $P_1$  и  $n_1$  — первоначальный платеж и срок его выплаты,

$n_0$  — срок выплаты нового платежа,  $a$  — равно либо  $\left( 1 + \frac{r^{(m)}}{m} \right)^m$ , либо  $\left( 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)^{-m}$ , либо  $e^\delta$ .

- Формула для вычисления срока нового платежа при использовании сложных ставок:

$$n_0 = n_1 + \frac{\ln P_0 - \ln P_1}{\ln a}, \quad (113)$$

где  $P_1$  и  $n_1$  — первоначальный платеж и срок его выплаты,  $P_0$  — величина нового платежа.

- Формула для определения величины консолидированного платежа при использовании сложных ставок:

$$P_0 = \sum_{k=1}^l P_k a^{n_0 - n_k}, \quad (114)$$

где  $P_1, P_2, \dots, P_l$  — платежи, выплачиваемые соответственно через время  $n_1, n_2, \dots, n_l$ ;  $n_0$  — срок консолидированного платежа.

- Формула для определения срока консолидированного платежа при использовании сложных ставок:

$$n_0 = \frac{\ln P_0 - \ln \sum_{k=1}^l P_k a^{-n_k}}{\ln a}, \quad (115)$$

где платежи  $P_1, P_2, \dots, P_l$ , уплачиваемые соответственно через время  $n_1, n_2, \dots, n_l$ ;  $P_0$  — величина консолидированного платежа.

- Будущая стоимость переменного аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst}^a = \sum_{k=1}^n C_k (1+r)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_k FM1(r, n-k). \quad (116)$$

- Приведенная стоимость переменного аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst}^a = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{(1+r)^k} = \sum_{k=1}^n C_k FM2(r, k). \quad (117)$$

- Будущая стоимость переменного аннуитета пренумеран-до:

$$FV_{pre}^a = \sum_{k=1}^n C_k (1+r)^{n-k+1} = FV_{pst}^a (1+r). \quad (118)$$

- Приведенная стоимость переменного аннуитета прену-меран-до:

$$PV_{pre}^a = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{(1+r)^{k-1}} = PV_{pst}^a (1+r). \quad (119)$$

- Будущая стоимость постоянного срочного аннуитета по-стнумеран-до:

$$FV_{pst}^a = A \cdot \sum_{k=1}^n (1+r)^{n-k} = A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = A \cdot FM3(r, n). \quad (120)$$

- Приведенная стоимость постоянного срочного аннуите-та постнумеран-до:

$$PV_{pst}^a = A \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = A \cdot FM4(r, n). \quad (121)$$

- Оценка постоянного  $p$ -срочного аннуитета постнуме-ран-до:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^a = A \cdot \frac{FM3(\frac{r}{m}, mn)}{FM3(\frac{r}{m}, \frac{m}{p})}; \quad (122)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^a = A \cdot \frac{FM4(\frac{r}{m}, mn)}{FM4(\frac{r}{m}, \frac{m}{p})}; \quad (123)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^a = \frac{A}{(1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} - 1}, \quad (124)$$

где  $A$  — величина каждого денежного поступления,  $r$  — ставка за базовый период начисления процентов,  $m$  — количество начислений сложных процентов в пе-риоде,  $p$  — количество денежных поступлений в периоде,  $n$  — количество периодов.

- Приведенная стоимость постоянного отсроченного ан-нуитета постнумеран-до:

$$PV_{pst}^a = A \cdot v^h FM4(r, n) = A \cdot FM2(r, h) \cdot FM4(r, n), \quad (125)$$

где  $v = \frac{1}{1+r}$ ;  $h$  — число периодов, через которое начинает поступать первый из потока платежей.

- Оценка постоянного  $p$ -срочного аннуитета пренумеран-до:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pre}^a = FV_{pst}^a \cdot (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} = FV_{pst}^a \cdot FM1(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}); \quad (126)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pre}^a = PV_{pst}^a \cdot (1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} = PV_{pst}^a \cdot FM1(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}); \quad (127)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pre}^a = PV_{pst}^a + A; \quad (128)$$

где  $FV_{pst}^a$ ,  $PV_{pst}^a$  — будущая и приведенная стоимости соответствующих аннуитетов постнумеран-до.

- Будущая стоимость постоянного  $p$ -срочного аннуитета постнумеран-до с начислением простых процентов в те-чение периода:

$$FV_{pst}^a = A \cdot (p + \frac{(p-1)r}{2}) \cdot FM3(r, n). \quad (129)$$

- Будущая стоимость постоянного  $p$ -срочного аннуитета пренумерандо с начислением простых процентов в течение периода:

$$FV_{pre}^a = FV_{pst}^a + Ar \cdot FM3(r, n). \quad (130)$$

- Оценка постоянного аннуитета постнумерандо в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^{a(\delta)} = A \cdot \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}; \quad (131)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}; \quad (132)$$

в) приведенная стоимость бессрчного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A \cdot \frac{1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}; \quad (133)$$

где  $A$  — величина каждого денежного поступления,  $\delta$  — сила роста за базовый период начисления процентов,  $p$  — количество денежных поступлений в периоде,  $n$  — количество периодов.

- Оценка непрерывного аннуитета:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV^a = \frac{\bar{A}r}{m^2 \ln(1 + \frac{r}{m})} FM3(\frac{r}{m}, mn); \quad (134)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV^a = \frac{\bar{A}r}{m^2 \ln(1 + \frac{r}{m})} FM4(\frac{r}{m}, mn); \quad (135)$$

в) приведенная стоимость бессрчного аннуитета:

$$PV^a = \frac{\bar{A}r}{m \ln(1 + \frac{r}{m})}, \quad (136)$$

где  $\bar{A}$  — суммарная величина денежных поступлений за базовый период начисления процентов.

- Оценка непрерывного аннуитета в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV^{a(\delta)} = \bar{A} \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{\delta}; \quad (137)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV^{a(\delta)} = \bar{A} \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{\delta}; \quad (138)$$

в) приведенная стоимость бессрчного аннуитета:

$$PV^{a(\delta)} = \frac{\bar{A}}{\delta}, \quad (139)$$

где  $\bar{A}$  — суммарная величина денежных поступлений за базовый период начисления процентов,  $\delta$  — сила роста за базовый период начисления процентов.

- Оценка переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^a = (A + \frac{z}{r}) \cdot FM3(r, n) - \frac{zn}{r}; \quad (140)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^a = (A + \frac{z}{r}) \cdot FM4(r, n) - \frac{zn}{r(1+r)^n}; \quad (141)$$

в) приведенная стоимость бессрчного аннуитета:

$$PV_{pst}^a = (A + \frac{z}{r}) \cdot \frac{1}{r} (z \geq 0), \quad (142)$$

где  $A$  — первый член прогрессии,  $z$  — разность прогрессии.

- Оценка переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^a = A \frac{q^n - (1+r)^n}{q - (1+r)}; \quad (143)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^a = \frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{q^n - (1+r)^n}{q - (1+r)}; \quad (144)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^a = \frac{A}{(1+r) - q} (1+r > q), \quad (145)$$

где  $A$  — первый член прогрессии,  $q$  — знаменатель прогрессии.

- Оценка постоянного аннуитета постнумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^a = A \cdot \frac{FM3(\frac{r}{m}, mn)}{FM3(\frac{r}{m}, mu)}; \quad (146)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^a = A \cdot \frac{FM4(\frac{r}{m}, mn)}{FM4(\frac{r}{m}, mu)}; \quad (147)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^a = \frac{A}{(1 + \frac{r}{m})^{mu} - 1}, \quad (148)$$

где  $A$  — величина каждого денежного поступления,  $r$  — ставка за базовый период начисления процентов,  $m$  — количество начислений сложных процентов в пе-

риоде,  $u$  — количество периодов, через которое осуществляются денежные поступления,  $n$  — количество периодов.

- Оценка постоянного аннуитета постнумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов, в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^{a(\delta)} = A \cdot \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{e^{\delta u} - 1}; \quad (149)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{e^{\delta u} - 1}; \quad (150)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A \cdot \frac{1}{e^{\delta \cdot u} - 1}, \quad (151)$$

где  $A$  — величина каждого денежного поступления,  $\delta$  — сила роста за базовый период начисления процентов,  $u$  — количество периодов, через которое осуществляются денежные поступления,  $n$  — количество периодов.

- Оценка постоянного аннуитета пренумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pre}^a = FV_{pst}^a \cdot (1 + \frac{r}{m})^{mu} = FV_{pst}^a \cdot FM1(\frac{r}{m}, mu); \quad (152)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pre}^a = PV_{pst}^a \cdot (1 + \frac{r}{m})^{mu} = PV_{pst}^a \cdot FM1(\frac{r}{m}, mu). \quad (153)$$

- Оценка постоянного аннуитета пренумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов, в случае начисления непрерывных процентов:

Приложение В

Таблица В.1

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pre}^a = FV_{pst}^a \cdot e^{\delta \cdot u}; \quad (154)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pre}^a = PV_{pst}^a \cdot e^{\delta \cdot u}. \quad (155)$$

Порядковые номера дней в невисокосном году

| Месяц<br>число | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|----------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1              | 1  | 32 | 60 | 91  | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 |
| 2              | 2  | 33 | 61 | 92  | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 |
| 3              | 3  | 34 | 62 | 93  | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 |
| 4              | 4  | 35 | 63 | 94  | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 |
| 5              | 5  | 36 | 64 | 95  | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 |
| 6              | 6  | 37 | 65 | 96  | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 |
| 7              | 7  | 38 | 66 | 97  | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 |
| 8              | 8  | 39 | 67 | 98  | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 |
| 9              | 9  | 40 | 68 | 99  | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 |
| 10             | 10 | 41 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 |
| 11             | 11 | 42 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 |
| 12             | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| 13             | 13 | 44 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 |
| 14             | 14 | 45 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 |
| 15             | 15 | 46 | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 |
| 16             | 16 | 47 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 |
| 17             | 17 | 48 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 |
| 18             | 18 | 49 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 |
| 19             | 19 | 50 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 |
| 20             | 20 | 51 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 |
| 21             | 21 | 52 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 |
| 22             | 22 | 53 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 |
| 23             | 23 | 54 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 |
| 24             | 24 | 55 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 |
| 25             | 25 | 56 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 |
| 26             | 26 | 57 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 |
| 27             | 27 | 58 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 |
| 28             | 28 | 59 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 |
| 29             | 29 |    | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 |
| 30             | 30 |    | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 |
| 31             | 31 |    | 90 |     | 151 |     | 212 | 243 |     | 304 |     | 365 |

Таблица В.2

## Порядковые номера дней в високосном году

| Месяц<br>число | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|----------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1              | 1  | 32 | 61 | 92  | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 |
| 2              | 2  | 33 | 62 | 93  | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 |
| 3              | 3  | 34 | 63 | 94  | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 |
| 4              | 4  | 35 | 64 | 95  | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 |
| 5              | 5  | 36 | 65 | 96  | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 |
| 6              | 6  | 37 | 66 | 97  | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 |
| 7              | 7  | 38 | 67 | 98  | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 |
| 8              | 8  | 39 | 68 | 99  | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 |
| 9              | 9  | 40 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 |
| 10             | 10 | 41 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 |
| 11             | 11 | 42 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| 12             | 12 | 43 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 |
| 13             | 13 | 44 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 |
| 14             | 14 | 45 | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 |
| 15             | 15 | 46 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 |
| 16             | 16 | 47 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 |
| 17             | 17 | 48 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 |
| 18             | 18 | 49 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 |
| 19             | 19 | 50 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 |
| 20             | 20 | 51 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 |
| 21             | 21 | 52 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 |
| 22             | 22 | 53 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 |
| 23             | 23 | 54 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 |
| 24             | 24 | 55 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 |
| 25             | 25 | 56 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 |
| 26             | 26 | 57 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 |
| 27             | 27 | 58 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 |
| 28             | 28 | 59 | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 |
| 29             | 29 | 60 | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 |
| 30             | 30 |    | 90 | 121 | 151 | 182 | 212 | 243 | 274 | 304 | 335 | 365 |
| 31             | 31 |    | 91 |     | 152 |     | 213 | 244 |     | 305 |     | 366 |

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                |   |
|----------------|---|
| ВВЕДЕНИЕ ..... | 3 |
|----------------|---|

## Глава 1. ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Методы учета фактора времени в финансовых операциях ..                                                  | 6  |
| 1.2. Простые проценты .....                                                                                  | 13 |
| 1.3. Начисление простых процентов в условиях учета<br>инфляции и налогообложения .....                       | 29 |
| 1.4. Расчеты по простым процентным ставкам с использова-<br>нием табличного процессора Microsoft Excel ..... | 40 |
| 1.5. Сложные проценты .....                                                                                  | 47 |
| 1.6. Расчет сложных процентов в электронных таблицах<br>Microsoft Excel .....                                | 67 |
| 1.7. Начисление сложных процентов в условиях инфляции<br>и налогообложения .....                             | 75 |
| 1.8. Построение схем (планов) погашения долгосрочных обя-<br>зательств .....                                 | 79 |

## Глава 2. ОЦЕНКА И АНАЛИЗ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| 2.1. Виды потоков платежей и их основные параметры ..... | 91  |
| 2.2. Оценка денежных потоков .....                       | 93  |
| 2.3. Критерии оценки инвестиционных проектов .....       | 101 |

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| Тесты для проверки усвоения пройденного материала ..... | 128 |
|---------------------------------------------------------|-----|

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ..... | 139 |
|---------------------------------------|-----|

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| Сводка основных формул ..... | 142 |
|------------------------------|-----|

## Приложение В

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| Порядковые номера дней в невисокосном году ..... | 167 |
| Порядковые номера дней в високосном году .....   | 168 |

*Учебное издание*

**Чусавитина Галина Николаевна**

## **ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Подписано в печать 27.05.2014

Электронное издание для распространения через Интернет.

ООО «ФЛИНТА», 117342, г. Москва,

ул. Бутлерова, д. 17-Б, комн. 324.

Тел./факс: (495) 334-82-65; тел. (495) 336-03-11.

E-mail: [flinta@mail.ru](mailto:flinta@mail.ru); WebSite: [www.flinta.ru](http://www.flinta.ru).